MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI
ȘCOALA NR. 22 "B. P. HAȘDEU" IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 28 FEBRUARIE 2015

EDIȚIA A XV-A

Clasa a V-a

SUBIECTUL I *„Pătrățele colorate"*

Jorj, un copil pasionat de matematică, în timp ce se gândea la o problemă, colora pe caiet pătrățele ca pe tabla de șah, pornind de la un colț al paginii. El observă astfel că fiecare din sumele 1 + 3; 1 + 3 + 5; …, are ca rezultat câte un număr care de fiecare dată este pătrat perfect. Folosind eventual aceeași judecată ca și Jorj, răspundeți la următoarele cerințe:

a) Aflați care este rezultatul sumei 1 + 3 + 5 + 7 +…+ 2015 și arătați că este pătrat perfect.
b) Aflați care este ultimul termen al sumei 1 + 3 + 5 +…+ n, știind că rezultatul este 10.000.000.000 și toți termenii sunt numere naturale impare.

BAREM

a) Suma inițială, 1 + 3 + 5 + 7 +…+ 2015, are 1008 termeni..... 2p
Obține 1 + 3 + 5 + 7 +…+ 2015 = 1008^2 = 1.016.064, pătrat perfect 4p

b) Dacă $n=2k+1$ obținem $1 + 3 + 5 +\ldots+ n=(k+1)^2$ 3p
Obține $k=99999$ 2p
Finalizare n = 199.999 ..... 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI
ȘCOALA NR. 22 "B. P. HAȘDEU" IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 28 FEBRUARIE 2015

EDIȚIA A XV-A

Clasa a V-a

SUBIECTUL II *"Perechi speciale de numere"*

O pereche ordonată de numere naturale nenule (a,b) se numeşte *pereche specială* dacă 3^a+7^b se divide cu 10.

a) Câte *perechi speciale* de forma $(a,2015)$, având $a<2015$, există ?

b) Să se demonstreze că dacă (a,b) este o *pereche specială*, atunci şi (b,a) este o *pereche specială* .

BAREM

a) Deoarece $2015=4\cdot503+3$, rezultă $U\left(7^{2015}\right)=3$ 2p

Căutăm $a<2015$, astfel încât $U\left(3^a\right)=7$ 2p

Finalizare 503 ***perechi speciale*** 3p

b) Trebuie să demonstrăm că dacă $10\mid\left(3^a+7^b\right)$, atunci $10\mid\left(3^b+7^a\right)$ 1p

Folosind ultima cifră deducem că $10\mid\left(3^a+7^b\right)$, pentru următoarele perechi (a,b) 3p

a	b
4k+1	4p+1
4k+2	4p
4k+3	4p+3
4k	4p+2

Demonstrează că , în fiecare situație din cele amintite, $10\mid\left(3^b+7^a\right)$ 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI
ȘCOALA NR. 22 "B. P. HAȘDEU" IAȘI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 28 FEBRUARIE 2015

EDIȚIA A XV-A

Clasa a V-a

SUBIECTUL III *„Pieţarii din Fruitsland”*

În Fruitsland, ţara lui Natural-Juice Împărat, sunt livezi cât vezi cu ochii şi discuţiile tot despre pomii fructiferi se poartă. Într-o zi, în Piaţa Centrală din Fruitsburg, capitala ţării, se auziră următoarele discuţii între mai mulţi pieţari care vindeau portocale şi mere:

- Eu am o livadă cu portocali, care e cât un sfert din livada cu portocali a împăratului, zise pieţarul Bebe, care vindea portocale.
- Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, zise altul către Bebe.
- Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, zise altul către vobitorul dinaintea lui.
- Livada mea cu portocali e chiar cât a ta şi toţi care am vorbit avem la un loc exact 4000 de portocali, zise ultimul către vobitorul dinaintea lui.

Aprins de subiectul discuţiei şi foarte mândru de sine, Bebe reveni şi zise:

- Eu mai am şi o livadă cu meri, care e şi ea cât un sfert din livada cu meri a împăratului.
- Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, zise altul către Bebe.
- Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, zise altul către vobitorul dinaintea lui.

.....

Această a doua discuţie a continuat şi nu se mai ştie cu câţi vorbitori a fost dar se ştie că, până la ultimul vorbitor, fiecare a spus că livada lui cu meri e doar jumătate cât a celui care a vorbit înaintea lui, pe când ultimul dintre vorbitori a zis către penultimul:

- Livada mea cu meri e chiar cât şi a ta şi toţi care am vorbit acum despre livezi cu meri avem la un loc exact 4096 de meri.

Aflaţi, din discuţiile lor:

a) Câţi portocali sunt în livada cu portocali a lui Natural-Juice Împărat.
b) Câţi meri sunt în livada cu meri a lui Natural-Juice Împărat.

BAREM:

a) Sunt 4 vorbitori. Dacă P este numărul portocalilor împăratului, cei patru vorbitori au respectiv: $\frac{P}{4}, \frac{P}{8}, \frac{P}{16}$, respectiv $\frac{P}{16}$ portocali 4p

Atunci $\frac{P}{4}+\frac{P}{8}+\frac{P}{16}+\frac{P}{16}=4000$ 3p

Finalizare $P=8000$ 1p

b) Dacă M este numărul merilor împăratului, atunci numărul merilor vorbitorilor este: $\frac{M}{2^2}, \frac{M}{2^3}, ..., \frac{M}{2^{n+1}}$, respectiv ultimul vorbitor care are $\frac{M}{2^{n+1}}$ 2p

Obţine $\frac{M}{2^2}+\frac{M}{2^3}+...+\frac{M}{2^{n+1}}+\frac{M}{2^{n+1}}=4096$ 2p

Finalizare $M=8192$ 1p