COLEGIUL NAȚIONAL
"ȘTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a XII-a

1. Fie $P \in \mathbb{C}[x]$ un polinom de grad 2013, având rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ în progresie aritmetică, $x_1 = 1$ și $x_{2013} = 2012$. Arătați că $P(a) + P(b) = 0, \forall a, b \in \mathbb{C}$ cu $a + b = 2013$.

Marius Marchitan, Suceava

Soluție: Fie $P = \alpha(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_{2013})$. Cum rădăcinile sunt în progresie aritmetică deducem că $2013 = x_1 + x_{2013} = x_2 + x_{2012} = \ldots = x_{1007} + x_{1007}$. Fie $a, b \in \mathbb{C}$ cu $a + b = 2013$. Atunci $P(a) = \alpha(a - x_1)(a - x_2)\ldots(a - x_{2013})$, iar $P(b) = \alpha(b - x_1)(b - x_2)\ldots(b - x_{2013}) =$
$= \alpha(2013 - a - x_1)(2013 - a - x_2)\ldots(2013 - a - x_{2013})$. Cum $2013 - x_i = x_{2014-i}, \forall i = \overline{1,2013}$, avem $P(b) = \alpha(x_{2013} - a)(x_{2012} - a)\ldots(x_1 - a) = (-1)^{2013} P(a) = -P(a)$ sau $P(a) + P(b) = 0$.

Barem:
Scrie $P = \alpha(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_{2013})$ 1p
Observă că $2013 = x_1 + x_{2013} = x_2 + x_{2012} = \ldots = x_{1007} + x_{1007}$ 2p
Obține $P(b) = \alpha(2013 - a - x_1)(2013 - a - x_2)\ldots(2013 - a - x_{2013})$ 2p
Finalizare $P(a) + P(b) = 0$ 2p

2. a) Arătați că $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \left(tg\frac{x}{2}\right)' + tg\frac{x}{2}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați $I = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} tg^{n-1}\frac{x}{2} \cdot e^{nx} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Ion Bursuc și Daniela Macovei, Suceava

Soluție: a) Verificăm imediat: $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \text{tg}\frac{x}{2} = \left(tg\frac{x}{2}\right)' + tg\frac{x}{2}$.

b) Conform punctului a) rezultă $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x = \left(tg\frac{x}{2}\right)' e^x + \left(e^x\right)' tg\frac{x}{2} = \left(e^x tg\frac{x}{2}\right)'$. Deducem că

$I = \int \left(e^x tg\frac{x}{2}\right)' \cdot \left(e^x tg\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx = \frac{1}{n}\left(e^x tg\frac{x}{2}\right)^n + C$.

Barem:
a) Demonstrează egalitatea 3p
b) Obține că $\left(e^x tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \cdot e^x$ 2p
Finalizare $I = \frac{1}{n}\left(e^x tg\frac{x}{2}\right)^n + C$ 2p

3. Arătați că funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ este injectivă. Care este imaginea funcției?

Supliment G.M. 3/2013

Soluţie: Fie $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}, g(t)=\frac{1}{\ln t}$ și G o primitivă a ei pe $(1,\infty)$, a cărei existență rezultă din continuitatea funcției g. Atunci $G'(t)=g(t)=\frac{1}{\ln t}$ și cum $f(x)=G(x^2)-G(x),$ deducem că f este derivabilă și $f'(x)=g(x^2)\cdot 2x-g(x)=\frac{2x}{\ln x^2}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}$. Ținând cont că $x\in(1,\infty)$, obținem că $f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $(1,\infty)$. Rezultă că f este injectivă, iar din continuitatea și monotonia funcției f găsim că $\operatorname{Im} f=\left(\lim_{x\to 1}f(x),\lim_{x\to\infty}f(x)\right)$. Vom determina mai întâi $\lim_{x\to\infty}f(x)$.

Pentru aceasta să observăm că $\frac{1}{\ln t}\geq\frac{1}{\ln x^2},\forall t\in(x,x^2),\forall x\in(1,\infty)$, de unde $f(x)\geq\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln x^2}dt=\frac{x^2-x}{2\ln x},\forall x\in(1,\infty)$. Cum $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{2\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{2}=\infty$, găsim că $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Pentru determinarea $\lim_{x\to 1}f(x)$ vom arăta că mai întâi că au loc inegalitățile $\frac{1}{t\ln t}\leq\frac{1}{\ln t}\leq\frac{1}{t-1}+\frac{1}{3-t},\forall t\in(1,3)\quad(*)$. Prima inegalitate este evidentă, iar a doua este echivalentă cu $\frac{1}{\ln t}\leq\frac{2}{-t^2+4t-3},\forall t\in(1,3)$, adică $\ln t+\frac{t^2-4t+3}{2}\geq 0,\forall t\in(1,3)$. Fie $h(t)=\ln t+\frac{t^2-4t+3}{2},t\in(1,3)$, de unde $h'(t)=\frac{1}{t}+t-2=\frac{(t-1)^2}{t}\geq 0,\forall t\in(1,3)$. Deducem că h este crescătoare pe $(1,3)$, deci $h(t)\geq\lim_{t\to 1}h(t)=0,\forall t\in(1,3)$. Integrând inegalitatea $(*)$ pe intervalul $\left[x,x^2\right]$, unde $x\in(1,\sqrt{3})$, obținem că $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt\leq f(x)\leq\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{3-t}\right)dt$. În continuare avem: $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\left(\ln(\ln t)\right)\Big|_x^{x^2}=\ln 2,\forall x\in(1,\sqrt{3})$, de unde $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}dt=\ln 2$ și $\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{3-t}\right)dt=\left(\ln\left|\frac{t-1}{t-3}\right|\right)\Big|_x^{x^2}=\ln\frac{x^2-1}{3-x^2}-\ln\frac{x-1}{3-x}=\ln\frac{(x+1)(3-x)}{(3-x^2)},\forall x\in(1,\sqrt{3})$, de unde $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{3-t}\right)dt=\ln 2$. Deducem că $\lim_{x\to 1}f(x)=\ln 2$ și $\operatorname{Im} f=(\ln 2,\infty)$.

Barem:

Arată că $f'(x)>0,\forall x\in(1,\infty)$ ……..…..…….2 p

Obține că f este injectivă.....1 p

Deduce că $\operatorname{Im} f=\left(\lim_{x\to 1}f(x),\lim_{x\to\infty}f(x)\right)$ .....……..1 p

Găsește $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ .....…….....…….……..…..1 p

Arată că $\lim_{x\to 1}f(x)=\ln 2$ și finalizează $\operatorname{Im} f=(\ln 2,\infty)$.....2 p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.