COLEGIUL NAŢIONAL
"ŞTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că $BA - (BA)^{-1} = 2014 I_2$.

Supliment G.M. 3/2013

Soluţie: Fie $C = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$. Observăm că $\det C = -1$ şi $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2014 & -2013 \end{pmatrix}$. Deducem că $\det A \cdot \det B = -1$, A, B sunt inversabile şi $B = A^{-1}C$. Atunci $BA - (BA)^{-1} = A^{-1}CA - A^{-1}B^{-1} =$ $= A^{-1}CA - A^{-1}C^{-1}A = A^{-1}\left(C - C^{-1}\right)A$. Cum $C - C^{-1} = 2014 I_2$ rezultă concluzia.

Barem:

Observă că $\det C = -1$ și $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2014 & -2013 \end{pmatrix}$, unde $C = \begin{pmatrix} 2013 & 1 \\ 2014 & 1 \end{pmatrix}$ 2p

Deduce că A, B inversabile și $B = A^{-1}C$ 2p

Obține $BA - (BA)^{-1} = A^{-1}\left(C - C^{-1}\right)A$.....2p

Finalizare $BA - (BA)^{-1} = 2014 I_2$ ……...……...……..1p

2. a) Dați exemplu de funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjectivă şi nemonotonă care nu are limită la ∞.

b) Dați exemplu de funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescătoare şi nesurjectivă având $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq \infty$.

c) Fiind dată funcţia crescătoare şi surjectivă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, să se arate că $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie: a) Un exemplu poate fi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \end{cases}$. Evident

$\operatorname{Im} f \supseteq f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Pentru $x_n = n\pi, y_n = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{N}$, avem

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} n\pi = 0, \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = 1$, adică f nu are limită la ∞. În plus, f nu este monotonă: $f(0) = 0 < 1 = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ și $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Cum $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ și $\operatorname{Im} f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că f este strict crescătoare și nu este surjectivă. În plus, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \neq \infty$.

c) Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât, $f(x) > \varepsilon, \forall x \in (\delta_\varepsilon, \infty)$.

Fie $\varepsilon > 0$ și x_ε cu $f(x_\varepsilon) = \varepsilon + 1$ (f este surjectivă), iar $\delta_\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x_\varepsilon \le 0 \\ x_\varepsilon, \text{ dacă } x_\varepsilon > 0 \end{cases}$. Atunci pentru orice $x \in (\delta_\varepsilon, \infty), x > x_\varepsilon$ avem $f(x) \ge f(x_\varepsilon) = \varepsilon + 1 > \varepsilon$.

Barem:
a) Exemplu corect și justificare.....2p
b) Exemplu corect și justificare.....2p
c) Demonstrează cerința.....3p

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă. Dacă funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(2x) + f(3x)$ este funcție polinomială, arătați că și f este funcție polinomială.

Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc

Soluţie: Dacă g este funcție polinomială de gradul m, atunci derivata de ordinul $m+1$ a funcției g este funcția identic nulă, deci $2^{m+1} f^{(m+1)}(2x) + 3^{m+1} f^{(m+1)}(3x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Înlocuind x cu $\frac{x}{3}$ obținem $f^{(m+1)}(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} f^{(m+1)}\left(\frac{2}{3}x\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Notăm cu $h = f^{(m+1)}$. Atunci $h(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} h\left(\frac{2}{3}x\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar h este o funcție continuă (de fapt indefinit derivabilă). Înlocuind succesiv x cu $\frac{2}{3}x$ obținem $h(x) = (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n(m+1)} h\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ținând cont că h continuă și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n(m+1)} = 0$, deducem că $f^{(m+1)}(x) = h(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $f^{(m)}(x) = a_m$, $f^{(m-1)}(x) = a_m x + a_{m-1}$, $f^{(m-2)}(x) = a_m x^2 + a_{m-1}x + a_{m-2}$, de unde prin inducție deducem că $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, adică f este funcție polinomială.

Barem:
Obține $2^{m+1} f^{(m+1)}(2x) + 3^{m+1} f^{(m+1)}(3x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $m = \operatorname{grad} g$ ……..…..……...2 p
Obține $f^{(m+1)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ .....……..3 p
Arată că f este funcție polinomială …….....……..…..…..2 p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.