COLEGIUL NAȚIONAL
"ȘTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a X-a

1. Pentru fiecare număr complex nenul z considerăm mulțimea $A_z=\left\{1+z+z^2+...+z^n \ / \ n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Determinați numerele z pentru care A_z este mulțime finită.

b) Câte numere complexe z au proprietatea că A_z are 2013 elemente?

Vladimir Cerbu, Cîmpulung Moldovenesc

Soluție.

a) Observăm că $A_1=\mathbb{N}$, deci $z=1$ nu convine.

Dacă A_z este mulțime finită, atunci există $r,s\in\mathbb{N}$ cu $r+1<s$ astfel încât $1+z+z^2+...+z^s=1+z+z^2+...+z^r$, de unde rezultă $1+z+z^2+...+z^{s-r-1}=0$. Înmulțind această egalitate cu $1-z$ se obține $z^{s-r}=1$, adică $z\in U_m$ $\left(m=s-r\geq 2\right)$. Am notat cu U_m mulțimea rădăcinilor de ordinul m ale unității.

Dacă $z\in U_m$, atunci $1+z+z^2+...+z^{m-1}=0$ și, grupând termenii câte m, obținem $1+z+z^2+...+z^n=1+z+z^2+...+z^r$, unde r este restul împărțirii lui n la m. Prin urmare, $A_z\subset\left\{1,1+z,1+z+z^2,\ ...\ ,1+z+...+z^{m-1}\right\}$, deci A_z este mulțime finită.

Numerele căutate sunt $z\in\bigcup_{m\geq 2}U_m\setminus\{1\}$.

b) Dacă $|A_z|=2013$, atunci A_z este mulțime finită, deci există $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, astfel încât $z^m=1$. Fie m_0 cel mai mic număr natural cu proprietatea de mai sus.

Demonstrăm că $A_z=\left\{1,1+z,1+z+z^2,\ ...\ ,1+z+...+z^{m_0-1}\right\}$ și atunci $|A_z|=m_0$.

Într-adevăr, pentru $n>m_0$ avem $1+z+z^2+...+z^n=1+z+z^2+...+z^r$, unde r este restul împărțirii lui n la m_0, iar pentru $1\leq r<s\leq m_0$ avem $1+z+z^2+...+z^s\neq 1+z+z^2+...+z^r$ (în caz contrar, obținem $z^{s-r}=1$ ceea ce contrazice faptul că m_0 este minim).

În concluzie, $|A_z|=2013\Leftrightarrow z^{2013}=1$ și $z^k\neq 1$ pentru $k=\overline{1,2012}$, adică z este rădăcină primitivă de ordinul 2013 a unității.

Numărul rădăcinilor primitive de ordinul 2013 ale unității este $\varphi(2013)=1200$.

Barem de corectare:

a) $A_1=\mathbb{N}$, deci $z=1$ nu convine ..... 1 p

Dacă A_z este mulțime finită, atunci $z\in U_m$ ..... 2 p

Dacă $z\in U_m$, atunci $A_z\subset\left\{1,1+z,1+z+z^2,\ ...\ ,1+z+...+z^{m-1}\right\}$ ..... 2 p

b) Dacă $|A_z|=2013$, atunci $z^m=1$. Fie m_0 cel mai mic număr natural cu $z^{m_0}=1$ ..... 1 p

$|A_z|=2013\Leftrightarrow z^{2013}=1\Leftrightarrow z$ este rădăcină primitivă de ordinul 2013 a unității și finalizare ..... 1 p

2. Rezolvați ecuația: $\sqrt[k]{\frac{2^x+1}{3^x+1}}+\sqrt[k]{\frac{3^x+1}{4^x+1}}+\sqrt[k]{\frac{4^x+1}{5^x+1}}=\sqrt[k]{\frac{2^x+1}{5^x+1}}+2$, unde $k\in\mathbb{N},k\geq 2$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție: Demonstrăm următoarea proprietate:

Demonstrăm următoarea proprietate :

Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in (0,1]$ *sau* $x_1, x_2, ..., x_n \in [1, \infty)$. *Dacă* $k, n \in \mathbb{N}$, $k, n \geq 2$, *atunci* $\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + ... + \sqrt[k]{x_n} \leq \sqrt[k]{x_1 x_2 .... x_n} + n - 1$ *cu egalitate dacă si numai dacă* $n-1$ *dintre numerele* $x_1, x_2, ..., x_n$ *sunt egale cu* 1.

Dacă notăm cu P(n) afirmaţia de mai sus, atunci P(2) este adevărată deoarece $\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} \leq \sqrt[k]{x_1 x_2} + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[k]{x_1} - 1\right)\left(1 - \sqrt[k]{x_2}\right) \leq 0$ inegalitate adevărată (cu egalitate dacă si numai dacă x_1=1 sau $x_2 = 1$)

Dacă presupunem că P(r) cu $r \geq 2$ este adevărată atunci

$\sqrt[k]{x_1} + \sqrt[k]{x_2} + ... + \sqrt[k]{x_{r+1}} \leq \sqrt[k]{x_1 x_2 ... x_r} + r - 1 +$

$+ \sqrt[k]{x_{r+1}} \leq \sqrt[k]{x_1 x_2 ... x_{r+1}} + r \Rightarrow \sum_{i=1}^{r+1} \sqrt[k]{x_1} \leq \sqrt[k]{x_1 x_2 .... x_{r+1}} + r$ cu egalitate dacă şi numai dacă r-1 dintre numerele $x_1, x_2, ..., x_r$ sunt egale cu 1 şi $x_1 x_2 ... x_r = 1$ sau $x_{r+1} = 1$, adică r dintre numerele $x_1, x_2, ..., x_{r+1}$ sunt egale cu 1.

Deci proprietatea $P(r+1)$ este adevărată şi prin urmare conform principiului inducţiei matematice P(n) este adevărată pentru orice $n \geq 2$.

În cazul nostru ,deoarece $\frac{2^x + 1}{5^x + 1} = \frac{2^x + 1}{3^x + 1} \cdot \frac{3^x + 1}{4^x + 1} \cdot \frac{4^x + 1}{5^x + 1}$ şi $\frac{2^x + 1}{3^x + 1}, \frac{3^x + 1}{4^x + 1}, \frac{4^x + 1}{5^x + 1} \in \begin{cases} (0,1], daca, x \geq 0 \\ [1, \infty), daca, x \leq 0 \end{cases}$

Deducem că ecuaţia din enunţ este echivalentă cu: două dintre numerele $\frac{2^x + 1}{3^x + 1}, \frac{3^x + 1}{4^x + 1}, \frac{4^x + 1}{5^x + 1}$ sunt egale cu 1, echivalent cu $x = 0$.

Barem:

Demonstrarea proprietăţii prin inducţie matematică (1 punct verificarea în cazul n=2 şi 3 puncte pentru demonstrarea implicaţiei). Aplicarea proprietăţii în rezolvarea ecuaţiei - 3 puncte

3. Fie $[AB]$ diametru în cercul de centru O şi C un punct al cercului distinct de A şi B. Dacă $BC = kAB$ şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează cercul în punctele B şi D, să se justifice relaţia $AD = AB\sqrt{\frac{1-k}{2}}$.

Dan Popescu, Suceava

Soluţie: [BD este bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{DC} \Rightarrow \Delta ABD$ este isoscel cu $AD = DC$. ΔABC este dreptunghic în $C \Rightarrow AC = AB\sqrt{1-k^2}$ (T. Pitagora). $ABCD$ este înscris în cerc $\Rightarrow$

$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$ (T. Ptolemeu) $\Rightarrow AB \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot BD = AD \cdot kAB + AB \cdot AD$

$\Rightarrow BD = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \cdot AD$. ΔABD este dreptunghic în $D \Rightarrow AD^2 = AB^2 - BD^2 \Rightarrow AD = AB\sqrt{\frac{1-k}{2}}$.

Barem:

$AC = AB\sqrt{1-k^2}$ ..... 2 p

$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC$ ..... 2 p

$BD = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \cdot AD$ ..... 2 p

Finalizare ..... 1 p

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.