COLEGIUL NAŢIONAL
"ŞTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENŢĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a IX-a

1. Fie $a,b\in(0,\infty),$ astfel ca $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{ax+by}{bx+ay}+\frac{ay+bz}{by+az}+\frac{az+bx}{bz+ax}\geq 3,\ \forall x,y,z\in(0,\infty).$$

Dan Popescu, Suceava

Soluţie şi barem: $\sum\frac{ax+by}{bx+ay}=\sum\frac{(ax+by)^2}{(bx+ay)\ (ax+by)}\geq\frac{\left(\sum(ax+by)\right)^2}{\sum\left((a^2+b^2)xy+ab(x^2+by)\right)}=$

$=\frac{(a+b)^2(x^2+y^2+z^2)+2(a+b)^2(xy+yz+zx)}{2ab(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2)\ (xy+yz+zx)}$, conform inegalităţii BERGSTRÖM.....3p

Cum $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R},$

$$\frac{(a+b)^2(x^2+y^2+z^2)+2(a+b)^2(xy+yz+zx)}{2ab(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2)\ (xy+yz+zx)}=$$

$$=\frac{6ab(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2-4ab)\ (x^2+y^2+z^2)+2(a+b)^2(xy+yz+zx)}{2ab(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2)(xy+yz+zx)}\geq$$

$$\geq\frac{6ab(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2-4ab)\ (xy+yz+zx)+2(a+b)^2(xy+yz+zx)}{2ab(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2)(xy+yz+zx)}=$$

$=\frac{6ab(x^2+y^2+z^2)+3(a^2+b^2)\ (xy+yz+zx)}{2ab(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2)(xy+yz+zx)}=3$, deoarece $a^2+b^2-4ab\geq 0$ 4p

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},f(n)=\begin{cases}3n+1, \text{ dacă n este impar}\\ \frac{n}{2}, \quad \text{dacă n este par}\end{cases}$, numită funcţia lui Lothar Collatz. Să se rezolve ecuaţia $f(f(n))+f(n)=2013$.

***

Soluţie: Distingem următoarele cazuri:

i) $n=4k,k\in\mathbb{N}\Rightarrow f(n)=2k,f(f(n))=k$ şi ecuaţia devine $3k=2013\Leftrightarrow k=671\Rightarrow$

$\Rightarrow n=2684.$

ii) $n=4k+1,k\in\mathbb{N}\Rightarrow f(n)=12k+4, f(f(n))=6k+2$ și ecuația nu are nicio soluție.

iii) $n=4k+2,k\in\mathbb{N}\Rightarrow f(n)=2k+1, f(f(n))=6k+4$ și ecuația devine $8k+5=2013$, de unde $n=1006$.

iv) $n=4k+3,k\in\mathbb{N}\Rightarrow f(n)=12k+10, f(f(n))=6k+5$. Obținem $18k+15=2013$, de unde $k=111\Rightarrow n=447$.

Soluțiile ecuației sunt $n\in\{447,1006,2684\}$.

Barem: Se vor acorda câte 2p puncte pentru găsirea fiecărei soluții și 1 punct pentru tratarea cazului în care ecuația nu are soluție.

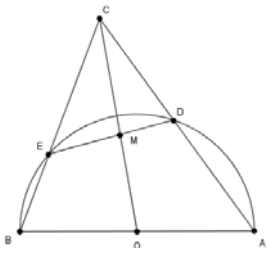
3. Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic și fie D, E punctele de intersecție ale cercului de diametru [AB] cu laturile [AC], respectiv [BC]. Notăm cu M intersecția dreptelor CO și DE, unde O este mijlocul segmentului [AB].

a) Să se demonstreze relația: $\left(\frac{BC}{CE}+\frac{AC}{CD}\right)\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$.

b) Să se arate că M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $AC^2+BC^2=3AB^2$.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluţie:



a) Deoarece E, M, D sunt puncte coliniare rezultă că există $\alpha\in(0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{CM}=\alpha\overrightarrow{CE}+(1-\alpha)\overrightarrow{CD}=\alpha\cdot\frac{CE}{CB}\overrightarrow{CB}+(1-\alpha)\frac{CD}{CA}\overrightarrow{CA}$. (1)

Vectorii $\overrightarrow{CM}$ și $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$ sunt coliniari, de unde deducem că $\alpha\frac{CE}{CB}=(1-\alpha)\frac{CD}{CA}\Leftrightarrow$ $\alpha\left(\frac{CE}{CB}+\frac{CD}{CA}\right)=\frac{CD}{CA}$. Obținem prin calcul $\left(\frac{BC}{CE}+\frac{AC}{CD}\right)\cdot\alpha\cdot\frac{CE}{CB}=1$ și din relația (1) rezultă $\left(\frac{BC}{CE}+\frac{AC}{CD}\right)\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$.

b) M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)\Leftrightarrow$ $\frac{BC}{CE}+\frac{AC}{CD}=3$. Din teorema medianei $CO^2=\frac{2BC^2+2CA^2-AB^2}{2}$.

Scriind puterea punctului C față de cercul dat avem:

$$CE\cdot CB=CD\cdot CA=CO^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2\Leftrightarrow CE\cdot CB=CD\cdot CA=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2}.$$

Obținem $\frac{BC}{CE}+\frac{AC}{CD}=3\Leftrightarrow\frac{BC^2}{BC\cdot CE}+\frac{AC^2}{AC\cdot CD}=3\Leftrightarrow BC^2+AC^2=3\left(\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2}\right)$, ultima relație fiind echivalentă cu concluzia.

Barem: a) $\overrightarrow{CM}=\alpha\cdot\frac{CE}{CB}\overrightarrow{CB}+(1-\alpha)\frac{CD}{CA}\overrightarrow{CA}$……..……..……..1p

Obține relația cerută……....2p

b) Deduce M centru de greutate $\Leftrightarrow \frac{BC}{CE}+\frac{AC}{CD}=3$. ……..……...1p

$CO^2=\frac{2BC^2+2CA^2-AB^2}{2}$.....1p

Obține $CE\cdot CB=CD\cdot CA=CO^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ……..…...……1p

Finalizare.....1p

<u>NOTĂ</u>: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.