COLEGIUL NAȚIONAL
"ȘTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a VIII-a

1. Fie numerele reale pozitive a,b,c care verifică relația $abc=1$. Demonstrați că:

a) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{(1+bc)^2}{(1+a)^2}+\frac{(1+ac)^2}{(1+b)^2}+\frac{(1+ab)^2}{(1+c)^2}$;

b) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1+a}{1+bc}+\frac{1+b}{1+ac}+\frac{1+c}{1+ab}$.

G.M. 7-8-9/2009

Soluţie şi barem: a) Avem $\frac{1+bc}{1+a}=\frac{1+bc}{abc+a}=\frac{1+bc}{a(bc+1)}=\frac{1}{a}$.

Analog $\frac{1+ac}{1+b}=\frac{1}{b},\frac{1+ab}{1+c}=\frac{1}{c},$ de unde rezultă concluzia.....3p

b) În inegalitatea $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz,\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

considerăm $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$. Obținem $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$.....2p

Din $abc=1$ deducem $\frac{1}{ab}=c=\frac{1+c}{1+ab}$ și analoagele.

Înlocuind în ultima inegalitate obținem $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{1+a}{1+bc}+\frac{1+b}{1+ac}+\frac{1+c}{1+ab}$.....2p

2. Fie *n* un număr natural nenul și numerele $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{Z}$ având suma egală cu zero. Să se arate că numărul $x_1^{2013}+x_2^{2013}+...+x_n^{2013}$ este divizibil cu 6.

Cristian Amorăriței, Suceava

Soluţie şi barem: Ținând cont de ipoteză, putem scrie:

$x_1^{2013}+x_2^{2013}+...+x_n^{2013}=\left(x_1^{2013}-x_1\right)+\left(x_2^{2013}-x_2\right)+...+\left(x_n^{2013}-x_n\right)=$

$=x_1\left(x_1^{2012}-1\right)+...+x_n\left(x_n^{2012}-1\right)$ ……..……..……2p

Arătăm că numărul $a=x\left(x^{2012}-1\right)$ este divizibil cu 6, pentru orice număr întreg *x*:

Dacă *x* este număr impar, rezultă că $x^{2012}-1$ este număr par, deci cel puțin unul dintre factorii lui *a* este număr par…….……2p

Dacă *x* este divizibil cu 3, rezultă în mod evident $a\vdots 3$.

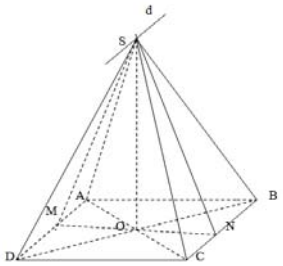
Dacă *x* este de forma $3k\pm1,$ atunci $x^{2012}-1$ este divizibil cu 3. ……2p

finalizare ……..……..1p

3. Se dă o piramidă patrulateră regulată SABCD. Dacă latura bazei, înălţimea piramidei şi apotema piramidei au lungimile trei numere naturale consecutive, să se calculeze sinusul unghiului format de două feţe laterale opuse.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti

Soluţie:



$\triangle SON$ este dreptunghic $\Rightarrow SN > SO$ şi $SN^2 = SO^2 + ON^2\ (1)$

Cazul 1: $\begin{cases} SN = x+2 \\ SO = x \\ AB = x+1 \Rightarrow ON = \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$

Relaţia (1) devine:

$(x+2)^2 = x^2 + \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4(x+2)^2 - 4x^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 4(x+2-x)(x+2+x) = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$16(x+1) - (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(15-x) = 0 \Rightarrow x = 15,$ deoarece $x > 0$

Deci $a = SN = 17,\ h = SO = 15,\ l = AB = 16.$

$(SBC) \cap (SAD) = d \Rightarrow d \parallel BC \parallel AD$ (conform teoremei acoperişului).

$\left.\begin{array}{l} SN \perp BC \\ SM \perp AD \\ BC \parallel AD \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} SN \perp d \\ SM \perp d \end{cases} \Rightarrow m\left(\measuredangle\left((SBC),(SAD)\right)\right) = m(\measuredangle MSN) \overset{not}{=} u.$

$A_{\triangle SMN} = \dfrac{a^2 \cdot \sin u}{2} = \dfrac{l \cdot h}{2} \Rightarrow a^2 \sin u = l \cdot h \Rightarrow \sin u = \dfrac{l \cdot h}{a^2} = \dfrac{16 \cdot 15}{289} = \dfrac{240}{289}.$

Cazul 2: $\begin{cases} SN = x+2 \\ SO = x+1 \\ AB = x \Rightarrow ON = \dfrac{x}{2} \end{cases}$. Obţinem:

$(x+2)^2 = (x+1)^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 - 4x^2 - 8x - 4 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 28$,

imposibil în $\mathbb{N}$.

Cazul 3: $\begin{cases} SN = x+1 \\ SO = x \\ AB = x+2 \Rightarrow ON = \dfrac{x}{2} + 1 \end{cases}$.

Avem: $(x+1)^2 = x^2 + \left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + \dfrac{x^2}{4} + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4x, x \neq 0 \Rightarrow x = 4.$

Deci $a = SN = 5, h = SO = 4, l = AB = 6$ şi $\sin u = \dfrac{l \cdot h}{a^2} = \dfrac{6 \cdot 4}{5^2} = \dfrac{24}{25}.$

Barem: Justifică $m\left(\measuredangle\left((SBC),(SAD)\right)\right) = m(\measuredangle MSN)$ 1p

Se vor acorda câte 2p pentru tratarea fiecărui caz.

<u>NOTĂ</u>: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.