COLEGIUL NAȚIONAL
"ŞTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a VII-a

1. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2013$ are loc inegalitatea:
$\left(1-\frac{1}{2013^3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2014^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^3}\right) > \frac{2012}{2013}$.

* * *

Soluţie:

$\frac{1}{2013^3} < \frac{1}{2013^2} \Rightarrow 1-\frac{1}{2013^3} > 1-\frac{1}{2013^2} = \left(1-\frac{1}{2013}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2013}\right) = \frac{2012}{2013}\cdot\frac{2014}{2013}$. Analog celelalte paranteze. Obţinem: $1-\frac{1}{2013^3} > \frac{2012}{2013}\cdot\frac{2014}{2013}$; $1-\frac{1}{2014^3} > \frac{2013}{2014}\cdot\frac{2015}{2014}$,…, $1-\frac{1}{n^3} > \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}$ de unde prin înmulţire membru cu membru, obţinem inegalitatea cerută.

Barem:

$\frac{1}{2013^3} < \frac{1}{2013^2}$ (1 punct); $1-\frac{1}{2013^3} > 1-\frac{1}{2013^2}$ (1 punct); $1-\frac{1}{2013^3} > \frac{2012}{2013}\cdot\frac{2014}{2013}$ (2 puncte); Înmulţirea inegalităţilor, membru cu membru (2 puncte); finalizare: (1 punct).

2. a) Fie $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$. Arătaţi că $\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}}$ este număr raţional.

Ion Bursuc, Suceava

b) Arătaţi că $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-2\sqrt{2}$ este un număr raţional.

* * *

Soluţie :

a) Din ipoteză avem $x+y=xy$. Atunci: $\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}} = \sqrt{\frac{x+y}{xy}-\frac{4}{x+y}} = \sqrt{\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}} = \frac{|x-y|}{x+y} \in \mathbb{Q}$

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

După înlocuire şi calcule se arată că numărul este egal cu zero, deci este raţional.

Barem de corectare:

a) 3 puncte

b) $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$ şi analoagele (2 puncte) ; finalizare (2 puncte)

3. În triunghiul ABC, $D \in (BC)$ astfel încât $AC = AD + DB$. Dacă $m(\sphericalangle ADB) = 80^0$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 20^0$, determinaţi $m(\sphericalangle BAC)$.

Mircea Lascu, Marius Stănean, Zalău

Soluţie:

Fie $E \in AD$ astfel încât A şi E să fie de o parte şi de alta a dreptei BC şi $DE = DB$. Rezultă $AE = AC$. Cum $m(\sphericalangle DAC) = 60^0$ rezultă că triunghiul ACE este echilateral. În ΔDBE, $DB = DE$ de unde rezultă că $m(BED) = m(DBE) = 40^0$. Dar $m(\sphericalangle BCE) = 60^0 - 20^0 = 40^0$ deci ΔBCE este isoscel. Cum $m(\sphericalangle AEB) = 40^0 \Rightarrow m(\sphericalangle ABE) = 70^0 \Rightarrow m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABE) - m(\sphericalangle DBE) = 70^0 - 40^0 = 30^0$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 130^0$.

Barem:

Construcţia punctului E (3 puncte); ΔACE echilateral (2 puncte); finalizare: 2 puncte.

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.