COLEGIUL NAȚIONAL
"ȘTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a VI-a

1. Se consideră numărul $A=1+2013+2013^2+2013^3+....+2013^{2013}$.
a) Să se arate că A este divizibil cu 19;
b) Să se demonstreze că $A=\frac{2013^{2014}-1}{2012}$.
c) Este 2012A pătrat perfect?

Corneliu Huzum, Vrancea

Soluție și barem:
a) $A=(1+2013)+2013^2\cdot(1+2013)+....+2013^{2012}\cdot(1+2013)$
$A=2014\cdot(1+2013^2+...+2013^{2012})\Rightarrow A\vdots 19$ 2p
b) $2013A-A=2013+2013^2+2013^3+...+2013^{2014}-1-2013-2013^2-...-2013^{2013}$
finalizare 3p
c) $U(2012\cdot A)=U(2013^{2014}-1)=9-1=8$
finalizare 2p

2. Trei case sunt dispuse sub forma unui triunghi.
a) Cum trebuie construită o șosea în linie dreaptă astfel încât distanțele de la fiecare casă la șosea să fie egale? Justificați.
b) Știind că perimetrul triunghiului este de 13 km și că fiecare latură este exprimată în km printr-un număr natural, câte astfel de triunghiuri necongruente există?

Mariana Liliana Popescu, Suceava

Soluție și barem:
a) Fie ABC respectivul triunghi și MN una din liniile mijlocii ale triunghiului 1p
Se demonstrează că d(A,MN)=d(B,MN)=d(C,MN) 2p
b) a+b+c=13 și punem condiția $1\le a,b,c\le 6$ 1p
Ținând cont de inegalitatea triunghiului, putem avea cazurile
$\{1,6,6\};\{2,5,6\};\{3,4,6\}\{3,5,5\}\{4,4,5\}$ 3p

3. Să se determine numărul natural *n* de forma $n = 2^a \cdot 3^b$, $a, b \in \mathbb{N}$, ştiind că numărul 2*n* are cu trei divizori mai mulţi ca *n* iar 3*n* are cu 4 divizori mai mulţi ca *n*.

Mara Moroşan, Suceava

Soluţie şi barem:
n are (a+1)(b+1) divizori, 2n are (a+2)(b+1) divizori, 3n are (a+1)(b+2) divizori 2p
Din (a+2)(b+1)= (a+1)(b+1)+3 se obține b=2 .....2p
Din (a+1)(b+2)= (a+1)(b+1)+4 se obține a=3 .....2p
Finalizare n=72 .....1p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.