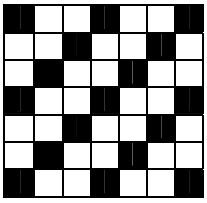
COLEGIUL NAȚIONAL
“ȘTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a V-a

1. Modelul din figura alăturată continuă în jos și la dreapta până se realizează un pătrat cu 100 de linii și 100 de coloane.
a) Primul pătrățel de pe ultima linie va fi alb sau negru?
b) Câte pătrățele de fiecare culoare va avea întreg modelul?



Adrian Vieriu, Suceava

Soluție și barem:
a) Pe liniile 1,4,7,...3k+1 primul pătrățel este negru
$100 = 3 \cdot 33 + 1$ deci pe linia 100 primul pătrățel este negru 2p
b) Numărul pătrățelelor negre se calculează astfel:
1+4+7+...+97+100+97+...+7+4+1=1717+1617=3334.....3p
Numărul total de pătrățele este 10000.....1p
Numărul de pătrățele albe este 6666.....1p

2. Suma a trei numere naturale este 2013. Un număr este de două ori mai mare decât altul, iar suma dintre unul din numere și triplul altuia este 2115. Determinați cele trei numere.

Cătălin Bărbuță, Vicovu de Sus

Soluție și barem:
x+y+z=2013 și putem considera că y=2x, obținând apoi z=2013-3x.....1p
Se disting cazurile:
1) x+3y=2115 – imposibil.....1p
2) y+3x=2115 – x=423, y=846, z=744.....1p
3) x+3z=2115 – imposibil.....1p
4) 3x+z=2115 – imposibil.....1p
5) y+3z=2115 – imposibil.....1p
6) 3y+z=2115 – x=34, y=68, z=1911.....1p

3. Să se arate că există cel puţin un multiplu de 37 care conţine acelaşi număr de cifre de 2 şi de 3 şi are numai aceste cifre.

Vasile Solcanu, Bogdăneşti

Soluţie şi barem:

Considerăm următoarele 38 de numere: 23: 2323: 232323:……. $\underbrace{232323.....23}_{38de23}$

Conform principiului cutiei există cel puţin două numere a şi b din acest şir care dau acelaşi rest la împărţirea cu 37. Rezultă că $a-b$ se divide cu 37.....3p

Avem : $a-b=\underbrace{2323....23}_{kde23}-\underbrace{2323....23}_{pde23}=\underbrace{2323....23}_{k-pde23}\ \underbrace{000....0}_{2pde0}=2323....23\cdot 10^{2p}$ 2p

Cum $\left(37;10^{2p}\right)=1\Rightarrow \underbrace{2323.....23}_{k-pde23}=M_{37}$ unde $k>p$ şi $p\neq 0$. Acest număr are acelaşi număr de 2 şi de 3 fiind format din perechi de cifre 23.....2p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.