COLEGIUL NAȚIONAL
"ȘTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ DIN MOLDOVA
- 25 mai 2013 -

CLASA a XII-a

1. Fie $P \in \mathbb{C}[x]$ un polinom de grad 2013, având rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ în progresie aritmetică, $x_1 = 1$ și $x_{2013} = 2012$. Arătați că $P(a) + P(b) = 0, \forall a, b \in \mathbb{C}$ cu $a + b = 2013$.

Marius Marchitan, Suceava

2. a) Arătați că $\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \left(tg\frac{x}{2}\right)' + tg\frac{x}{2}, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați $I = \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} tg^{n-1}\frac{x}{2} \cdot e^{nx} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Ion Bursuc și Daniela Macovei, Suceava

3. Arătați că funcția $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ este injectivă. Care este imaginea funcției?

Supliment G.M. 3/2013

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de 2 ore și 30 minute.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.