COLEGIUL NAȚIONAL
"ȘTEFAN CEL MARE"
SUCEAVA

CONCURSUL CENTRELOR DE EXCELENȚĂ
- 25 mai 2013 -

CLASA a IX-a

1. Fie $a,b\in(0,\infty)$, astfel ca $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{ax+by}{bx+ay}+\frac{ay+bz}{by+az}+\frac{az+bx}{bz+ax}\geq 3,\ \forall x,y,z\in(0,\infty).$$

Dan Popescu, Suceava

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=\begin{cases}3n+1, \text{ dacă n este impar}\\ \frac{n}{2}, \quad \text{dacă n este par}\end{cases}$, numită funcţia lui Lothar Collatz. Să se rezolve ecuaţia $f(f(n))+f(n)=2013$.

***

3. Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic și fie D, E punctele de intersecție ale cercului de diametru [AB] cu laturile [AC], respectiv [BC]. Notăm cu M intersecția dreptelor CO și DE, unde O este mijlocul segmentului [AB].

a) Să se demonstreze relația: $\left(\frac{BC}{CE}+\frac{AC}{CD}\right)\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}.$

b) Să se arate că M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă

$$AC^2+BC^2=3AB^2.$$

Cristian Amorăriței, Suceava

NOTĂ: Timpul efectiv de lucru este de 2 ore și 30 de minute.
Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.