



**SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE-FILIALA CRAIOVA
COLEGIUL NAȚIONAL „FRĂȚII BUZEȘTI” CRAIOVA**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ

Etapa I (Online)

20.02.2021

Clasa a X-a

1. (4 p) Se consideră ecuația $\sqrt{x^2 - 1} = 2 - 2x$. Numărul soluțiilor ecuației este egal cu:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) alt răspuns .

2. (4 p) Se consideră numerele $a = \log_3 5$ și $b = \log_2 3$. Exprimarea lui $\lg 2$ în funcție de a și b este:

- a) $\frac{1}{1+ab}$; b) $1 + ab$; c) $\frac{a}{1+b}$; d) $\frac{b}{1+a}$; e) alt răspuns .

3. (4 p) Fie $a = \sqrt[3]{48}$, $b = 3\sqrt[6]{5}$, $c = \sqrt{10}$. Are loc următoarea relație între aceste numere:

- a) $a < b < c$; b) $a < c < b$; c) $c < a < b$; d) $a < c < b$; e) $c < b < a$.

4. (4 p) Fie funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = z^2 - z + \frac{1}{2}$ și $a = \frac{2-i}{3+i}$. Atunci $f(a)$ este:

- a) $f(a) = 2 + i$; b) $f(a) = 7 - 2i$; c) $f(a) = 0$; d) $f(a) = 1 - i$; e) $f(a) = 4 + 7i$.

5. (4 p) Mulțimea tuturor valorilor reale ale lui a pentru care numărul $(1 + ai)^{100} + (1 - ai)^{100}$ este real:

- a) $\{0\}$; b) $\{1\}$; c) $\{-1, 0, 1\}$; d) \mathbb{N} ; e) \mathbb{R} .

6. (4 p) Numărul funcțiilor injective $f: \{a, b, c\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ cu proprietatea că $f(a) + f(b) + f(c) = 11$ este:

- a) 0; b) 1; c) 3; d) 4^3 ; e) alt răspuns .

7. (4 p) Partea întreagă a numărului $\log_5 2021$ este:

- a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

8. (4 p) Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ ax - 1, & x < 1 \end{cases}$. Valoarea lui a pentru care f este bijectivă este:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

9. (4 p) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow A, f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Atunci mulțimea A pentru care f este surjectivă:

- a) \mathbb{R} ; b) $[0, \infty)$; c) $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$; d) $\left[\frac{1}{3}, 3\right)$ e) $\left[\frac{1}{3}, 3\right] - \{1\}$.

10. (4 p) Fie $\alpha = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$. Atunci α este egal cu:

- a) -1; b) 3; c) 4; d) $8\sqrt{5}$; e) alt răspuns .

11. (4 p) Fie numerele $x = \lg^2 19$ și $y = 2\lg 6$. Are loc:

- a) $x = y$; b) $x > y$; c) $x < 2y$; d) $x = 3y$; e) alt răspuns .

12. (4 p) Pentru $a \in \mathbb{R}^*$, se consideră mulțimea $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = a + \frac{i}{a}, |z| \leq \sqrt{2} \right\}$. Atunci $\text{card} A$ este:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

13. (4 p) Numărul perechilor soluțiilor sistemului: $\begin{cases} \log_3 x + \log_2 y = 2 \\ 3^x - 2^y = 23 \end{cases}$ este egal cu:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) alt răspuns .

14. (4 p) Numărul perechilor $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ care verifică soluțiilor:

$x(x + 2)(x + 8) = 3^y$ este egal cu:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) nu se poate preciza .

15. (4 p) Dacă $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = \bar{z}\}$, atunci $\text{card} A$ este:

- a) 0; b) 1; c) 3; d) 5; e) alt răspuns .

16. (4 p) Numărul soluțiilor naturale al ecuației:
 $x^{7-x} = 5^{x-5} + 1$ este:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

17. (4 p) Dacă $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$, atunci $z^{2021} + \frac{1}{z^{2021}}$ este egal cu:

- a) $\sqrt{3}$; b) 1; c) 0; d) -1; e) $-\sqrt{3}$.

18. (4 p) Suma soluțiilor ecuației $x^{x-4} = 1$ este egală cu:

- a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

19. (3 p) Numărul soluțiilor injective care verifică relația:

$f(2^x) + f(3^x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ este:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) alt răspuns .

20. (3 p) Dacă $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4| = 3\}$ și $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = 2\}$, atunci $\text{card}(A \cap B)$ este:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

21. (3 p) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ și $|z_1| = |z_2| = 1$, atunci $|z_1 - z_2|$ este egal cu:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

22. (3 p) Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, atunci minimul expresiei

$E = \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$ este egal cu:

- a) 1; b) n ; c) $2n$; d) $3n$; e) alt răspuns .

23. (3 p) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Rezultă că valoarea numărului $|z_1 + z_2 + z_3|$ este:

- a) 0; b) 2; c) 3; d) 4; e) 8.

24. (3 p) Dacă $2^x + 3^x + 2^{-x} + 3^{-x} = 4$, atunci $x^2 + x + 1$ este egal cu:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) alt răspuns .

Notă:

- *Timp de lucru: 2 ore.*
- *Fiecare subiect are un singur răspuns corect.*
- *10 puncte din oficiu.*