



**SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE-FILIALA CRAIOVA  
COLEGIUL NAȚIONAL „FRAȚII BUZEȘTI” CRAIOVA**

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ**

**Etapa I (Online)**

**20.02.2021**

**Clasa a VIII-a**

**1. (4 p)** Fie cubul  $ABCD A'B'C'D'$  de muchie  $a$ . Fie  $O$  și  $O'$  centrele fețelor  $ABCD$  și  $A'B'C'D'$ . Măsura unghiului dintre dreptele  $AO'$  și  $BD$  este:

- a)  $60^\circ$ ;      b)  $90^\circ$ ;      c)  $30^\circ$ ;      d)  $45^\circ$ ;      e)  $75^\circ$ .

**2. (4 p)** Fie cubul  $ABCD A'B'C'D'$  de muchie  $a$ . Fie  $O$  și  $O'$  centrele fețelor  $ABCD$  și  $A'B'C'D'$ . Distanța dintre dreptele  $AO'$  și  $BD$  este:

- a)  $a\sqrt{3}$ ;      b)  $\frac{a}{\sqrt{6}}$ ;      c)  $a$ ;      d)  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ;      e)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**3. (4 p)** Dacă  $a, b, c$  sunt laturile unui triunghi astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ , atunci triunghiul este:

- a) isoscel;      b) dreptunghic;      c) oarecare;      d) echilateral;      e) scalen.

**4. (4 p)** Fie numărul  $a = \frac{27}{45}$  și mulțimea  $M = \{a, 2a, 3a, \dots, 45a\}$ . Atunci card  $M \cap N$  este:

- a) 8;      b) 9;      c) 1;      d) 10;      e) 5.

**5. (4 p)** Fie mulțimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{5x-13}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Atunci card  $A$  este:

- a) 4;      b) 6;      c) 8;      d) 10;      e) 2.

**6. (4 p)** Fie  $A = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$  și

$B = (3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}) : (3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20})$ . Atunci produsul  $AB$  este:

- a) 2;      b) 12;      c) 1;      d) 6;      e) 3.

7. (4 p) Fie numărul

$$A = n[(1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{n})], n \in \mathbb{N}^*$$

Atunci numărul  $A$  aparține mulțimii:

- a)  $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ;                      b)  $\mathbb{N}$ ;                      c)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ;                      d)  $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ ;                      e)  $\emptyset$ .

8. (4 p) Determinați câte numere de forma  $\overline{ab} \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\sqrt{\overline{ab} + \overline{ba}} \in \mathbb{N}$  există.

- a) 10                      b) 2                      c) 8                      d) 1                      e) 0

9. (4 p) Fie  $A = 1000^4 - 2 \cdot 1001^2 + 4003$ . Atunci  $\sqrt{A}$  este:

- a) 1000;                      b) 999;                      c) 1 000 000;                      d) 999 999;                      e) 1001.

10. (4 p) Fie numărul  $= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}$ . Atunci partea întreagă a numărului  $\mathbb{N}$  este:

- a) - 44;                      b) 44;                      c) 43;                      d) -43;                      e) 0.

11. (4 p) Fie  $ABCD$  tetraedru cu  $BC = BD$ . Fie  $[BE]$  bisectoarea unghiului  $\widehat{ABC}$ ,  $E \in [AC]$  și  $[BF]$  bisectoarea unghiului  $\widehat{ABD}$ ,  $F \in [AD]$ . Stabiliti poziția dreptei  $EF$  față de planul  $(BCD)$ :

- a) perpendiculară;                      b) secantă;                      c) inclusă;                      d) paralelă;                      e) coplanară.

12. (4 p) Fie ecuația  $(x + 2)(x + 3)(x - 4)(x - 5) = 144$ . Suma soluțiilor distincte ale ecuației este:

- a) 4;                      b) 2;                      c) 0;                      d) 1;                      e) 3.

13. (4 p) Fie tringhiul  $\Delta ABC$  echilateral și  $S$  un punct exterior planului  $(ABC)$  astfel încât  $[SA] \equiv [SB] \equiv [SC]$ .  $M$  mijlocul lui  $[BC]$  și măsura unghiului format de  $AC$  și  $SM$  este de  $60^\circ$ . Atunci, măsura unghiului dintre  $SA$  și  $SM$  este:

- a)  $60^\circ$ ;                      b)  $90^\circ$ ;                      c)  $30^\circ$ ;                      d)  $45^\circ$ ;                      e)  $75^\circ$ .

14. (4 p) Fie  $ABCD$  trapez cu  $AB$  și  $CD$  baze,  $AB + CD = AD$ . În  $A$  se ridică perpendiculara  $MA$  pe planul  $(ABCD)$ . Fie  $N$  mijlocul lui  $[BC]$ . Atunci, măsura unghiului dintre dreptele  $MN$  și  $DN$  este:

- a)  $60^\circ$ ;                      b)  $90^\circ$ ;                      c)  $30^\circ$ ;                      d)  $45^\circ$ ;                      e)  $75^\circ$ .

15. (4 p) Fie  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \geq 5\}$ . Determinați  $\mathbb{R} \setminus A$ .

- a)  $(-2; 3)$ ;                      b)  $[-2; 3]$ ;                      c)  $(-1; 2)$ ;                      d)  $[-1; 2]$ ;                      e)  $(-\infty; -2] \cup [3; \infty)$ .

16. (4 p) Fie  $\Delta ABC$  dreptunghic,  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ ,  $AB = 40$ ,  $AC = 30$ . Pe planul triunghiului  $\Delta ABC$  se ridică perpendiculara  $MA$ ,  $MA = 10$ . Atunci, distanța de la  $A$  la planul  $(MBC)$  este:

- a) 24;                      b)  $\frac{24}{13}$ ;                      c)  $\frac{120}{13}$ ;                      d) 10;                      e)  $\frac{12}{13}$ .

**17. (4 p)** Fie tringhiul  $\triangle ABC$  echilateral și  $S$  un punct exterior planului  $(ABC)$  astfel încât  $[SA] \equiv [SB] \equiv [SC]$ .  $M \in [SO]$  astfel încât  $MA \perp MB$ . Atunci, raportul  $\frac{MO}{MD}$  este:

- a) 1;                      b)  $\frac{1}{4}$ ;                      c)  $\frac{1}{3}$ ;                      d)  $\frac{2}{3}$ ;                      e)  $\frac{1}{2}$ .

**18. (4 p)** Fie  $VABCD$  piramida patrulateră regulată cu  $VA = VB = VC = VD = 5\sqrt{6}$  și  $AB = 10\sqrt{2}$ . Fie  $M$  mijlocul segmentului  $[AB]$  și  $N$  mijlocul segmentului  $[DC]$ . Atunci  $m(\widehat{VM, VN})$  este:

- a)  $60^\circ$ ;                      b)  $90^\circ$ ;                      c)  $30^\circ$ ;                      d)  $45^\circ$ ;                      e)  $75^\circ$ .

**19. (3 p)** Fie numărul  $A = \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \dots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci:

- a)  $A \leq \frac{n}{2}$ ;                      b)  $A \leq \frac{n}{3}$ ;                      c)  $A \leq \frac{n}{4}$ ;                      d)  $A \leq \frac{n}{5}$ ;                      e)  $A \leq \frac{n}{6}$ .

**20. (3 p)** Fie  $A = a(a-1)(a-2)(a-3) + 1$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Atunci  $\sqrt{A}$  aparține mulțimii:

- a)  $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ ;                      b)  $\mathbb{N}$ ;                      c)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ;                      d)  $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ ;                      e)  $\emptyset$ .

**21. (3 p)** Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic,  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ . Fie  $M$  un punct exterior planului  $(ABC)$  astfel încât  $m(\widehat{MB, AB}) = 90^\circ$  și  $m(\widehat{MC, AC}) = 90^\circ$ . Fie  $N$  mijlocul lui  $[AM]$  și  $P$  mijlocul lui  $[BC]$ . Atunci,  $m(\widehat{PN, (ABC)})$  este:

- a)  $60^\circ$ ;                      b)  $90^\circ$ ;                      c)  $30^\circ$ ;                      d)  $45^\circ$ ;                      e)  $75^\circ$ .

**22. (3 p)** Fie prisma patrulateră regulată dreaptă  $ABCD A'B'C'D'$  și punctele  $E \in (BC)$  și  $F \in (C'D')$  astfel încât  $[BE] \equiv [C'F]$ . Atunci măsura unghiului dintre dreptele  $AF$  și  $DE$  este:

- a)  $30^\circ$ ;                      b)  $45^\circ$ ;                      c)  $60^\circ$ ;                      d)  $75^\circ$ ;                      e)  $90^\circ$ .

**23. (3 p)** Dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  pentru care  $a + b + c = 9$  și  $ab + bc + ca = 27$ , calculați  $a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}$ .

- a)  $3^{2021}$ ;                      b)  $3^{2019}$ ;                      c)  $3^{2020}$ ;                      d)  $3 \cdot 2^{2021}$ ;                      e)  $3^{2018}$ .

**24. (3 p)** În tetraedrul  $ABCD$ , fie  $M, N, P, Q$  mijloacele muchiilor  $BC, BD, AD$  și respectiv  $AC$ . Ce figură geometrică este patrulaterul  $MNPQ$ ?

- a) romb;                      b) paralelgram;                      c) pătrat;                      d) dreptunghi;                      e) trapez isoscel.

**Notă:**

- Timp de lucru: 2 ore.
- Fiecare subiect are un singur răspuns corect.
- 10 puncte din oficiu.