SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE-FILIALA CRAIOVA
COLEGIUL NAȚIONAL „FRAȚII BUZEȘTI" CRAIOVA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I (Online)
20.02.2021

Clasa a VII-a

1. Partea fracționară a numărului $a = 1 - 2\sqrt{2}$ este:

a) $2-\sqrt{2}$; b) $1-\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{2}-3$; d) $6-4\sqrt{2}$; e) $3-2\sqrt{2}$.

2. Numerele $a, b \in \mathbb{Q}$ pentru care $2a\sqrt{7+2\sqrt{6}} - b\left|3\sqrt{6}-7\right| = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{6}}$ sunt:

a) $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{4}$; b) $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{8}$; c) $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{6}$; d) $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$; e) $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$.

3. Rezultatul calculului $\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}\right)^{2021} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}\right)^{2020} + \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}$ este:

a) $2\sqrt{3}$; b) 0; c) $3\sqrt{2}$; d) $\sqrt{2}$; e) $3\sqrt{3}$.

*Problemele **4-5** se referă la următorul enunț:

Se consideră suma $n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}$.

4. Atunci partea întreagă a lui n, notată $[n]$, este egală cu:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 2021.

5. Fie numărul $x = \sqrt{n(1+2+\cdots+2020)}$, unde n este suma din enunțul " * " . Atunci, dintre afirmațiile următoare este adevărată:

a) $x \in \mathbb{N}$; b) $x \in \mathbb{Z}$; c) $x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$; d) $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; e) alt răspuns.

6. Rezultatul calculului $\sqrt{\frac{5}{0,0(2)}} + \sqrt{\frac{55}{0,0(02)}} + \sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$ este:

a) $15 \cdot 121$; b) $15 \cdot 122$; c) $15 \cdot 123$; d) $15 \cdot 124$; e) $15 \cdot 125$.

7. Fie $a \in \mathbb{Q}_+$. Atunci $\sqrt{a(a+2)(a+4)(a+6)+16}$ este egal cu:

a) a^2+6a+4; b) a^2+4a+4; c) a^2+2a+4; d) a^2+a+4; e) a^2+3a+4.

8. Fie numerele $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Valoarea lui $t = \sqrt{(xy+2021z)(yz+2021x)(zx+2021y)}$ este:

a) $(x+2020y)(y+2020z)(z+2020x)$; b) $(x+2021y)(y+2021z)(z+2021x)$;
c) $(x+3y)(y+3z)(z+3x)$; d) $(x+2y)(y+2z)(z+2x)$;
e) $(x+y)(y+z)(z+x)$.

9. Se consideră numerele $x, y, z, d \in \mathbb{Q}_+^*$ și $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Dacă $\frac{x\sqrt{d}+y}{y\sqrt{d}+z} \in \mathbb{Q}$, atunci:

a) $x = z$; b) $y = x + z$; c) $x^2 = yz$; d) $y^2 = xz$; e) $z^2 = xy$.

10. Mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $x^2 \leq 3 - 4\sqrt{11-4\sqrt{7}}$ este:

a) $\{-1\}$; b) $\{-1, 0\}$; c) $\{-1, 1\}$; d) $\{0, 1\}$; e) $\{0\}$.

11. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD, AB > CD$. Știind că lungimile laturilor în cm sunt exprimate prin numere naturale, $\sphericalangle(A) = 60^\circ$ și perimetrul trapezului este de 12 cm, atunci lungimea bazei mici este de:

a) 1 cm ; b) 2 cm; c) 3 cm; d) 4 cm; e) 5 cm.

*Problemele **12-14** se referă la următorul enunț:

Se consideră ΔABC oarecare și punctul M mijlocul lui BC.

12. În condițiile de mai sus avem, afirmația adevărată este:

a) $2AM < AB + AC$; b) $2AM > AB + AC$; c) $2AM = AB + AC$;
d) $2AM = 2AB + AC$; e) $AM = AB + AC$.

13. Dacă, în plus, $D \in (AC)$ astfel încât $AD = 2DC$, atunci valoarea raportului $\frac{\mathcal{A}_{\Delta DMC}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}$, unde prin $\mathcal{A}_{\Delta DMC}$ înțelegem aria triunghiului ΔDMC , este:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\frac{1}{6}$.

14. În condițiile de la problemele **12** și **13**, fie N simetricul lui M față de C.

Dacă $MD \cap AN = \{E\}$, atunci:

a) $AE = 2EN$; b) $AE = EN$; c) $2AE = EN$; d) $3AE = 2EN$; e) $2AE = 3EN$.

15. Se consideră ΔABC $(AB = AC)$ ascuțitunghic isoscel. În exteriorul său se construiește pătratul $ACDE$, astfel încât pătratul și triunghiul să nu aibă puncte interioare comune. Fie AM, $M \in CD$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle(BAC)$. Dacă $BC \cap DE = \{N\}$ și $AB \cap DE = \{P\}$, atunci ΔPBN este:

a) ascuțitunghic isoscel; b) dreptunghic isoscel; c) obtuzunghic isoscel;
d) echilateral; e) dreptunghic.

16. Se consideră cercurile $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ secante în punctele A *și* B.
Dacă $O_1A \cap \mathcal{C}(O_2, R_2) = \{C\}$, $O_2A \cap \mathcal{C}(O_1, R_1) = \{D\}$ și $\sphericalangle(DAO_1) = 35^\circ$, atunci arcul mic $\widehat{AC}$ are măsura:

a) 150°; b) 135°; c) 130°; d) 120°; e) 110°.

*Problemele **<u>17-18</u>** se referă la următorul enunț:

Se consideră triunghiul dreptunghic $\Delta ABC, \sphericalangle(A) = 90^\circ$. Fie $AD \perp BC, D \in BC$ și $CE, E \in AB$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle(ACB)$.

17. Dacă $AD \cap CE = \{G\}$, atunci triunghiul ΔAEG este:

a) scalen; b) dreptunghic; c) obtuzunghic; d) isoscel; e) alt răspuns.

18. Dacă, în plus, $EF \perp BC, F \in BC$, atunci patrulaterul $AEFG$ este:

a) paralelogram, dar nu romb; b) dreptunghi; c)romb; d) trapez; e) alt răspuns.

19. Numărul natural $1754^{12} - 1$ este divizibil cu:

a) 555; b) 565; c) 585; d) 595; e) 1754.

20. Dacă $\frac{2^n - 2}{n} \in \mathbb{Z}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

a) $\frac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{2^{2^n - 2} - 2}{2^n - 1} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{2^{2^n - 3} - 2}{2^n - 1} \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{2^{2^n} - 2}{2^n - 1} \in \mathbb{Z}$; e) $\frac{2^{2^n - 1} + 2}{2^n - 1} \in \mathbb{Z}$.

21. În triunghiul ΔABC, cu $\sphericalangle(CAB) = \sphericalangle(CBA) = 80^\circ$, se consideră $M \in (BC)$ astfel încât $CM = AB$. Măsura unghiului $\sphericalangle(AMB)$ este:

a) 25°; b) 30°; c) 20°; d) 35°; e) 50°.

22. Se consideră triunghiul isoscel ΔABC, cu $AB = AC$ și $\sphericalangle(CAB) = 100^{\circ}$. Fie punctul D în interiorul triunghiului astfel încât $\sphericalangle(DBC) = 30^{\circ}$ și $\sphericalangle(DCB) = 20^{\circ}$. Măsura unghiului $\sphericalangle(BAD)$ este:

a) 50°; b) 35°; c) 30°; d) 25°; e) 20°.

*Problemele **23-24** se referă la următorul enunț:

Fie I punctul de intersecție al bisectoarelor AI *și* BI ale ΔABC. Se știe că $\sphericalangle(AIB) = 150^{\circ}$.

23. Măsura unghiului $\sphericalangle(C)$ al ΔABC este:

a) 100°; b) 110°; c) 120°; d) 130°; e) 90°.

24. Fie AK un diametru al cercului circumscris triunghiului ΔABC din problema **23.** De asemenea considerăm D, proiecția lui B pe AK. Raportul $\frac{AD}{AK}$ este:

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{1}{6}$.

Notă:

- *Timp de lucru: 2 ore.*
- *Fiecare subiect are un singur răspuns corect.*
- *10 puncte din oficiu.*