SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE-FILIALA CRAIOVA
COLEGIUL NAȚIONAL „FRAȚII BUZEȘTI" CRAIOVA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I (Online)
20.02.2021

Clasa a XII-a

1. (4 p) Care sunt primitivele funcției: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$:

a) $F(x) = x \sin x + \mathcal{C}$; b) $F(x) = x \cos x + \mathcal{C}$; c) $F(x) = x^2 \sin x + \mathcal{C}$;
d) $F(x) = x^2 \sin x$; e) $F(x) = x(\sin x + \cos x) + \mathcal{C}$.

2. (4 p) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = ax + by + c, a, b, c \in \mathbb{R}$. Știind că elemental neutru este $e = 2021$, să se determine suma $a + b + c$.

a) 2019; b)2020; c) 2021; d) -2020; e) -2019 .

3. (4 p) Să se determine produsul $P = \alpha\beta\gamma$ știind că pentru orice funcție polinomială f de gradul al doilea are loc relația: $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \alpha \cdot f(-1) + \beta \cdot f(0) + \gamma \cdot f(1)$.

a) $P = \frac{4}{27}$; b) $P = 0$; c) $P = \frac{1}{3}$; d) $P = -2$; e) $P = 1$.

4. (4 p) Să se calculeze: $I = \int_{-2}^{2} \min\left(x, x^2, x^3\right) dx$.

a) $I = 0$; b) $I = \frac{1}{2}$; c) $I = -\frac{1}{2}$; d) $I = -\frac{5}{2}$; e) $I = -\frac{3}{2}$.

5. (4 p) Pentru care valori ale parametrului real a, intervalul $(2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție: $x * y = xy - 2x - 2y + a, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

a) $(2, \infty)$; b) $(0, 2)$; c) $[6, \infty)$; d) $(-\infty, 2)$; e) $(-\infty, 6)$.

6. (4 p) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & x \\ x & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_6)$. Dacă $B = \{ x \in \mathbb{Z}_6 \mid A$ este inversabilă$\}$ și $S = \sum_{x \in B} x$, atunci:

a) $S = \hat{1}$; b) $S = \hat{2}$; c) $S = \hat{3}$; d) $S = \hat{4}$; e) $S = \hat{5}$.

7. (4 p) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x \cdot e^{nx} + x^2 + a}{e^{nx} + 1}, a \in \mathbb{R}$.

Să se precizeze valoarea lui a astfel încât f să admită primitive pe **R**.

a) $a \in \mathbb{R}$; b) $a = 0$; c) $a = 1$; d) $a = -1$; e) $a > 2$.

8. (4 p) Pe mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se definesc două legi de compoziție " $*$ " și " $\circ$ " prin $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + i$ și $z_1 \circ z_2 = iz_1z_2$. Fie e_1 și e_2 elementele neutre pentru legile " $*$ " și " $\circ$ ". Valoarea expresiei $E = e_1 * e_2 - e_1 \circ e_2 + 2021$, este:

a) 2020; b) -2020; c) -2021; d) 2021; e) 0 .

9. (4 p) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy + 2ax + y, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrul real a astfel încât legea să fie asociativă.

a) $a = 0$; b) $a = -\frac{1}{2}$; c) $a = 1$; d) $a = -1$; e) $a = \frac{1}{2}$.

10. (4 p) Să se determine cea mai mică valoarea posibilă a integralei $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - bx - a\right)^2 dx, a, b \in \mathbb{R}$.

a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{45}$; c) 1 ; d) $\frac{5}{4}$; e) $\frac{8}{45}$.

11. (4 p) Să se determine m real dacă $m\int_{1}^{\sqrt{2}} e^{m x^2 + \ln x} dx = 1$.

a) 2; b) 3; c) $\ln\frac{1}{2}$; d) $\ln 2$; e) $\ln 3$.

12. (4 p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ care satisfice relația

$f(x) + 2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, \forall\, x \in \mathbb{R}^*$. Dacă $I = \int_1^2 f(x)dx$, atunci:

a) $I = -\frac{4}{9}$; b) $I = -\frac{4}{3}$; c) $I = \frac{5}{9}$; d) $I = -\frac{7}{3}$; e) $I = \frac{2}{3}$.

13. (4 p) Fie $G = \{ f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_m(x) = m \cdot (1+x) - 1, m \in (0,\infty)\}$ și "$\circ$" operația de compunere a două funcții. Dacă $m, n \in (0,\infty)$ astfel încât $\begin{cases} f_m \circ f_n = f_5 \\ 2(f_m \circ f_{n-1}) - f_{m+1} = f_6 \end{cases}$ și $T = m^2 + n^2$, atunci:

a) $T = 13$; b) $T = 20$; c) $T = 25$; d) $T = 26$; e) $T = 29$.

14. (4 p) Se consideră funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^t \ln\left(1 - t + t^2\right) dt$.
Dacă p este numărul punctelor de extrem local ale lui F, atunci:

a) $p = 0$; b) $p = 1$; c) $p = 2$; d) $p = 4$; e) $p = 3$.

15. (4 p) Pe mulțimea $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ definim legea:

$x * y = \begin{cases} x - y + 2, & \text{dacă } (x-z)\cdot(y-z) \geq 0, \forall z \in H \\ x + y - 3, & \text{dacă } \exists z \in H \text{ astfel încât } (x-z)\cdot(y-z) < 0 \end{cases}$. Dacă p este numărul soluțiilor distincte ale ecuației $x * 3 = 1$, atunci:

a) $p = 2$; b) $p = 3$; c) $p = 4$; d) $p = 5$; e) $p = 6$.

16. (4 p) Fie funcția $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot ([x-1]!)$, unde $[x-1]$ este partea întreagă a lui $x - 1$. Dacă $S = \sum_{k=1}^{100} \frac{2(k-1)}{2k+1} \cdot \int_k^{k+1} f(x)dx$, atunci:

a) $S = 100! + 1$; b) $S = 100! - 1$; c) $S = 101! - 1$; d) $S = 99!$; e) $S = 101! + 1$.

17. (4 p) Se consideră grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(G, *)$ unde $G = (-1, 1)$ și $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ și $f_{m,n} : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f_{m,n} = \frac{m \cdot x + n}{x+1}$. Dacă $A = \left\{ (m,n) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{m,n} \text{ este izomorfism de grupuri} \right\}$ și $S = \sum_{(m,n)\in A} \left(m^2 + n^2\right)$, atunci:

a) $S = 8$; b) $S = 18$; c) $S = 24$; d) $S = 6$; e) $S = 4$.

18. (4 p) Se consideră funcția $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{x+1} \frac{t^2}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} dt$. Decideți:

a) f este impară; b) f are două puncte de extrem;
c) graficul lui f admite o asimptotă oblică; d) graficul lui f admite o asimptotă orizontală;
e) f este convexă.

19. (3 p) Calculați:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx.$$

a) $\sqrt{3}(1-\ln 2)$; b) $\sqrt{3}(1-\ln 2)+\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}(1-\ln 2)-\frac{\pi}{3}$; d) $\sqrt{3}(1-\ln 2)-\frac{\pi}{3}$; e) $\sqrt{3}\ln 2-\frac{\pi}{3}$.

20. (3 p) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile: $f(x)\leq x, \forall\, x\in\mathbb{R}$ și $f(x+y)\leq f(x)+f(y), \forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Dacă $I=\int_0^1 \big(f(x)-f(-x)\big)dx$, atunci:

a) $I=\ln 2$; b) $I=0$; c) $I=-1$; d) $I=2^{-1}$; e) $I=1$.

21. (3 p) Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție " * " prin:
$x*y=xy-2x-2y+6, \forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Dacă S este suma elementelor din $\mathbb{R}$ care coincide cu simetricele lor în raport cu legea " * ", atunci:

a) $S=5$; b) $S=4$; c) $S=7$; d) $S=1$; e) $S=0$.

22. (3 p) Pe mulțimea $G=(0,\infty)$ se definește legea de compoziție " * " prin
$x*y=a^{g(x,y)}, \forall\, x,y\in G$, unde:
$g(x,y)=\sqrt[k]{(\log_a x)^k+(\log_a y)^k-(\log_a b)^k}$, iar $a,b\in(0,1)\cup(1,\infty)$ și $k\in\mathbb{N}^*$, impar, $k\geq 3$. Dacă $S=u+v$, unde u și v sunt elementul neutru, respectiv simetricul elementului $x=1$ în raport cu legea " * ", atunci:

a) $S=b+a^{\sqrt{b}}$; b) $S=b+k$; c) $S=b+b^{2k}$; d) $b+b^{\sqrt[k]{2}}$; e) $S=k+b\cdot a^k$.

23. (3 p) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3+5x}{x^2+1}$. Să se calculeze $I=\int_0^3 f^{-1}(t)dt$, unde f^{-1} este inversa funcției bijective .

a) $\frac{1}{2}(5-4\ln 2)$; b) $\frac{3+4\ln 2}{2}$; c) $\frac{1}{2}(5+4\ln 2)$; d) $\frac{1}{2}(2+\ln 2)$; e) $\frac{1}{2}(5-\ln 2)$.

24. (3 p) Mulțimea valorilor parametrului real a pentru care funcția:
$f:\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), f(X)=\begin{pmatrix} a & 5\\ -1 & a+5\end{pmatrix}X$, este automorfism al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),+)$, este:

a) $\{-4,-3,-2,-1\}$; b) $\{-3,-2\}$; c) $\{-4,-1\}$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R}-\left\{\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Notă:

- *Timp de lucru: 2 ore.*
- *Fiecare subiect are un singur răspuns corect.*
- *10 puncte din oficiu.*