



**SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE-FILIALA CRAIOVA
COLEGIUL NAȚIONAL „FRAȚII BUZEȘTI” CRAIOVA**

OLIMPIADA NAȚIONALĂ GAZETA MATEMATICĂ

Etapa I (Online)

20.02.2021

Clasa a XI-a

1. (4 p) Numărul de permutări $x \in S_7$ care verifică

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \text{este:}$$

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 3; e) 4.

2. (4 p) Care este numărul de soluții în S_{2022} ale ecuației :

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2021 & 2022 \\ 2022 & 2021 & 2020 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) 2022; b) 2021; c) 0; d) 1; e) 2.

3. (4 p) Pentru ce permutare $x \in S_5$ valoarea produsului :

$$(1+x(1))(2+x(2))(3+x(3))(4+x(4))(5+x(5)) \text{ este maximă.}$$

- a) e; b) $x=(15)$; c) $x=(23)$; d) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; e) nu există.

4. (4 p) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci A^{100} este egal cu:

- a) I_2 ; b) $\begin{pmatrix} -2^{100} & 0 \\ 0 & -2^{100} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2^{50} & 0 \\ 0 & -2^{50} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -2^{25} & 0 \\ 0 & -2^{25} \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (4 p) Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculând $\text{Tr}(A^5 B) - \text{Tr}(AB^5)$ se obține:

- a) 0; b) -1; c) 1; d) 5; e) -5.

6. (4 p) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Cine este $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $AB = BA$.

- a) $x=0, y=1$; b) $x=1, y=0$; c) $x=y=0$; d) $x=y=1$; e) $x=1, y=-1$.

7. (4 p) În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & -4x+1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Știind că $A(x)A(y) = A(x+y+xy)$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$, determinați produsul $A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(2020) \cdot A(2021)$.

- a) I_2 ; b) $A(2021!+1)$; c) $A(2022!-1)$; d) $A(2022!+1)$; e) $A(2021!)$.

8. (4 p) Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ să fie nesingulară pentru

$(\forall)x \in \mathbb{R}$.

- a) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$; b) $m \in (2, +\infty)$; c) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$; d) $m \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; e) $m \in \mathbb{R}$.

9. (4 p) Dacă ABC este un triunghi cu lungimile laturilor a, b, c , calculați

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2 A & \cos^2 B & \cos^2 C \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} :$$

- a) -1; b) 0; c) 1; d) abc ; e) $a + b + c$.

10. (4 p) Mulțimea numerelor reale x pentru care $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^2 & 1 & 4 \\ 1 & x^3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 0$ este:

- a) $\{-1, 2\}$; b) $\{1, 2\}$; c) $\{-1, 1\}$; d) $\{-1, 1, 2\}$; e) $\{1\}$.

11. (4 p) Fie în plan punctele $A(-n, n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci aria triunghiului $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ este :

- a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) 2; d) $\frac{1}{4}$; e) 4.

12. (4 p) Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ -x + 5y + 4z = 1 \\ x - 3y - 2z = m \end{cases}$. Valorile parametrului real m pentru care

sistemul este incompatibil sunt:

- a) $m = -\frac{3}{11}$; b) $m = \pm \frac{3}{11}$; c) $m \neq -\frac{3}{11}$; d) $m \in \emptyset$ e) $m \neq \frac{3}{11}$.

13. (4 p) Cât este $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt[3]{n} - \sqrt[5]{n})$.

- a) ∞ ; b) 0; c) 1; d) 3; e) 5.

14. (4 p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}{2n+1}$ este:

- a) -1; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) -2; e) 2.

15. (4 p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ este:

- a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) 2; e) $+\infty$.

16. (4 p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ este egală cu:

- a) 0; b) 1; c) 2; d) 4; e) $+\infty$.

17. (4 p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^n}$ este:

- a) 1; b) 2; c) 3; d) $\frac{2}{3}$; e) $-\infty$.

18. (4 p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^4}$ este :

- a) 0; b) $\frac{1}{4}$; c) 1; d) 2; e) $+\infty$

19. (3 p) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e}$ este:

- a) 0; b) e; c) $\frac{1}{e}$; d) 1; e) -1.

20. (3 p) Fie şirul $a_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ este:

- a) $\frac{2}{3}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 1; e) nu există.

21. (3 p) Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ şi $x_1 \in (0,1)$. Ştiind că $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ există, valoarea ei este:

- a) -1; b) 0; c) 1; d) 2; e) $+\infty$.

22. (3 p) Valorile reale ale lui a şi b pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1}+ax) = b$ sunt:

- a) $a = -1$,
 $b = 0,5$; b) $a = 1$,
 $b = -1$; c) $a = b = 1$; d) $a = 2$,
 $b = 1,5$; e) $a = 3$,
 $b = -2$.

23. (3 p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt[5]{x}}}{\sqrt[5]{x + \sqrt[3]{x}}}$ este:

- a) 1; b) 0; c) 3; d) 5; e) 15.

24. (3 p) Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relația de recurență

$x_1 = 1, \quad \frac{1}{n(n+1)} x_n x_{n+1} = x_n - x_{n+1}, \forall n \geq 1.$ Se știe că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este convergent, unde

$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{((2k-1)x_k)!},$ atunci limita lui este:

- a) $e - 1$; b) e ; c) 1; d) $2e$; e) $3e$.

Notă:

- *Timp de lucru: 2 ore.*
- *Fiecare subiect are un singur răspuns corect.*
- *10 puncte din oficiu.*