



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2020

Clasa a IX-a

Problema 1.

Fie $a, b, c > 0$. Să se demonstreze că:

a) $(a+b) \cdot (b+c) \cdot (c+a) \geq 8 \cdot a \cdot b \cdot c$

b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3 \cdot a \cdot b \cdot c$

c) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Problemă propusă de Vasile Popa, profesor Galați

Problema 2.

a) Să se demonstreze că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $[a] = [b]$, atunci $|a - b| < 1$.

b) Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x-1}{2} \right] = \left[\frac{x+1}{3} \right]$.

Problemă propusă de Vasile Popa, profesor Galați

Problema 3.

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin: $x_1 = \frac{1}{4}$ și $\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2 + 2 \cdot n}$, $n \geq 1$.

Să se arate că $\sum_{k=1}^n (2k+1) \cdot x_k < 1$, $(\forall) n \geq 1$. (s-a notat $\sum_{k=1}^n (2k+1) \cdot x_k = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + \dots + (2 \cdot n + 1) \cdot x_n$).

Problemă selectată de Vasile Popa, profesor Galați

Problema 4.

a) Fie punctele O, A, B, C , iar A, B, C distincte două câte două. Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OB} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \cdot \overrightarrow{OC}$.

b) Considerăm punctele A, B, C, A', B', C' în același plan. Arătați că suma vectorilor \overrightarrow{MN} , cu $M \in \{A, B, C\}$ și $N \in \{A', B', C'\}$, este nulă dacă și numai dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate.

Problemă selectată de Vasile Popa, profesor Galați