Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	Soluţie: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left[(a\cdot b)^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}\cdot b^{\frac{1}{x+2}}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\cdot b^{\frac{1}{x+2}}\cdot\left(a^{\frac{1}{x\cdot(x+1)}}\cdot b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}} - 1\right) =$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot a^{\frac{1}{x+1}}\cdot b^{\frac{1}{x+2}}\cdot\left(a^{\frac{1}{x\cdot(x+1)}}\cdot b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}} - b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}} + b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}} - 1\right) =$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left[b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}}\cdot\left(a^{\frac{1}{x\cdot(x+1)}} - 1\right) + b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}} - 1\right] =$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}}\cdot\left(a^{\frac{1}{x\cdot(x+1)}} - 1\right) + \lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}} - 1\right) =$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{a^{\frac{1}{x\cdot(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x\cdot(x+1)}}\cdot\frac{1}{x\cdot(x+1)} + \lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\frac{b^{\frac{2}{x\cdot(x+2)}} - 1}{\frac{2}{x\cdot(x+2)}}\cdot\frac{2}{x\cdot(x+2)} =$ $\ln a + 2\cdot\ln b = \ln\left(a\cdot b^2\right)$	**2p** **2p** **2p** **1p**

2.	a) Ecuaţia caracteristică este: $t^2-8t+15=0$, cu soluţiile $t_1=3,\ t_2=5$. Atunci şirul este de forma $x_n=\alpha\cdot 3^n+\beta\cdot 5^n,\ n\geq 1$.	1p
	Din $x_1=2$ şi $x_2=1\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\\ \beta=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x_n=\frac{3}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot 5^n,\ n\geq 1$.	1p
	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.	1p
	$b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{5\cdot x_n}=\frac{1}{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\cdot 3^{n+1}-\frac{1}{2}\cdot 5^{n+1}}{\frac{3}{2}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot 5^n}=\frac{1}{5}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n-\frac{1}{2}}=1$.	2p
	$c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{5\cdot x_n}\right)^{\frac{x_n}{n^{2020}}}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}-5\cdot x_n}{5\cdot x_n}\right)^{\frac{x_n}{n^{2020}}}=$	1p
	$e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-5x_n}{5\cdot x_n}\cdot\frac{x_n}{n^{2020}}}=e^{\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\cdot 3^{n+1}-\frac{1}{2}\cdot 5^{n+1}-\frac{15}{2}\cdot 3^n+\frac{5}{2}\cdot 5^n}{n^{2020}}}=e^{\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3^{n+1}}{n^{2020}}}=e^{-\infty}=0$	2p

3.	. $\left.\begin{array}{l} A^n=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}/\cdot \mathrm{A}\Rightarrow \mathrm{A}^{n+1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot \mathrm{A} \\ \mathrm{A}\cdot\ /\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{A}^{n+1}=A\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot \mathrm{A}\quad (1)$ Fie A=$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$; Înlocuind în relaţia (1) pe A, obţinem: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=a\Rightarrow b=0\\c+d=a+c\Rightarrow a=d\end{cases}\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix},\ a,c\in\mathbb{R};$ Calculăm puterile matricei A: $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0\\2\cdot a\cdot c&a^2\end{pmatrix};$ $\mathrm{A}^3=\begin{pmatrix}a^2&0\\2\cdot a\cdot c&a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&0\\3\cdot a^2\cdot c&a^3\end{pmatrix};$ .... $\mathrm{A}^k=\begin{pmatrix}a^k&0\\k\cdot a^{k-1}\cdot c&a^k\end{pmatrix},\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}^*,k\geq 2;$ Se demonstrează prin inducţie matematică că $\mathrm{A}^k=\begin{pmatrix}a^k&0\\k\cdot a^{k-1}\cdot c&a^k\end{pmatrix},\ \mathrm{k}\in\mathbb{N}^*,k\geq 2;$	**2p** **2p**

	Atunci ecuaţia devine: $\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ n\cdot a^{n-1}\cdot c & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^n = 1 \\ n\cdot a^{n-1}\cdot c = 1 \end{cases}$	**1p**
	În rezolvarea ecuaţiei $a^n = 1,$ distingem 2 cazuri: Cazul 1. Dacă $n = 2q+1,\ q\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a^n = 1$ are o unică soluţie reală a=1$\Rightarrow$ c=$\frac{1}{n}\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3,\ n$= număr impar	**1p**
	Cazul. Dacă n=2q, $q\in\mathbb{N}^* \Rightarrow a^n = 1$ are 2 soluţii reale: a=$\pm 1\Rightarrow$ c=$\pm\frac{1}{n}\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$ sau A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{n} & -1 \end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2,\ n$= număr par.	**1p**

4.	$a)$ Demonst răm prin inducţie matematică că: $\mathrm{P}(p)$: $\mathrm{B}^{2^p} = A^p \cdot B \cdot A^{-p},\ (\forall)\, p \in \mathbb{N}^*$ 1.Verificare: p=1 $\Rightarrow \mathrm{P}(1): B^2 = A \cdot B \cdot A^{-1}\ (A)$ 1.Demonstrăm că $P(p) \to P(p+1), (\forall)\, p \in \mathbb{N}^*$ Presupunem că $P(p)$ este adevărată; Să demonstrăm că $P(p+1)$ este adevărată $P(p+1): \mathrm{B}^{2^{p+1}} = A^{p+1} \cdot B \cdot A^{-p-1}$ $\mathrm{B}^{2^{p+1}} = \left(\mathrm{B}^{2^p}\right)^2 = \left(A^p \cdot B \cdot A^{-p}\right)^2 = \left(A^p \cdot B \cdot A^{-p}\right) \cdot \left(A^p \cdot B \cdot A^{-p}\right) =$ $A^p \cdot B^2 \cdot A^{-p} = A^p \cdot \left(A \cdot B \cdot A^{-1}\right) \cdot A^{-p} = A^{p+1} \cdot B \cdot A^{-p-1};$ Din 1 şi 2 $\Rightarrow P(p)\ (A);\ \forall\, p \in \mathbb{N}^*$ b) În particular, pentru $p = m$, avem $B^{2^m} = A^m \cdot B \cdot A^{-m} = B \Rightarrow B^{2^m - 1} = I_n.$ Demonstrăm că $2^m - 1 \in \mathbb{N}^*$ este cel mai mic număr cu proprietatea cerută. Presupunem că există $k \in \mathbb{N}^*,\ k < 2^m - 1$ astfel încât $\mathrm{B}^k = I_n$. $2^m - 1$ este număr prim $\Rightarrow \left(2^m - 1,\ k\right) = 1 \Rightarrow (\exists)\, a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \cdot \left(2^m - 1\right) + b \cdot k = 1;$ $B = B^1 = B^{a \cdot \left(2^m - 1\right) + bk} = \left(B^{\left(2^m - 1\right)}\right)^a \cdot \left(B^k\right)^b = I_n \Rightarrow\ B = I_n\ \ (F) \Rightarrow$ $2^m - 1$ este cel mai mic număr cu proprietatea cerută.	**3p** **1p** **1p** **2p**