Societatea de Ştiinţe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

# Olimpiada Naţională de Matematică
## Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 18 martie 2017

## CLASA a IX-a

**Problema 1.** Fie $A_1, B_1, C_1$ picioarele înălţimilor triunghiului ascuţitunghic $ABC$. Pe segmentele $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$ se consideră punctele $X, Y$, respectiv $Z$, astfel încât

$$\frac{C_1X}{XB_1} = \frac{b\cos C}{c\cos B},\ \frac{A_1Y}{YC_1} = \frac{c\cos A}{a\cos C} \text{ şi } \frac{B_1Z}{ZA_1} = \frac{a\cos B}{b\cos A}.$$

Arătaţi că dreptele $AX, BY$ şi $CZ$ sunt concurente.

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Fie $ABC$ un triunghi în care $O$ şi $I$ sunt respectiv centrul cercului circumscris şi centrul cercului înscris. Mediatoarele segmentelor $IA, IB, IC$ se intersectează două câte două formând triunghiul $A_1B_1C_1$. Arătaţi că

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}.$$

**Problema 3.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale nenule. Notăm $S_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că:

a) Dacă $p$ este un număr prim, $p \geq 5$, atunci $S_p$ se divide cu $p$;

b) $S_5$ nu este pătrat perfect.

**Problema 4.** Fie $a, b, c$ numere reale pozitive cu proprietatea $ab + bc + ca + abc = 4$. Arătaţi că

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3 \leq a + b + c.$$

*Timp de lucru 4 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*