

PROBLEME PROPUSE
pentru
CONCURSUL REVISTEI

Clasa a V-a

CG:145 Să se arate că pentru orice $n, n \in \mathbb{N}$, numărul natural $a = 2^n + 3^n + 7^n$ nu poate fi pătrat perfect.

Liviu Smarandache, profesor, Craiova

CG:146 Un număr natural n împărțit la numerele 3,5,7,8 dă respectiv resturile 1,3,5,6. Să se arate că n este par.

Gheorghe Tutulan, profesor, Galați

CG:147 Să se arate că fracția $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008 + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2009 + 1}$ este ireductibilă.

Dorina Andrei - Nicoară, profesor, Galați

CG:148 În Neverland există trei corăbii cu pirați. Dacă un călător care ajunge pe o corabie are la el un număr par de galbeni, căpitanul îi mai dă trei galbeni, iar dacă are un număr impar de galbeni, căpitanul îi ia 1 galben și încă jumătate din cei rămași. După ce Peter Pan trece pe la fiecare din cele trei corăbii, rămâne cu 502 galbeni. Știind că la început Peter Pan a avut un număr par de galbeni, notat cu n , determinați suma cifrelor lui n .

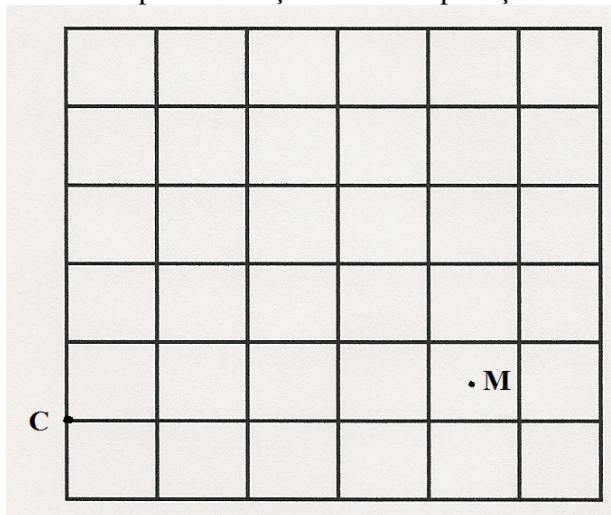
Romeo Zamfir, profesor, Galați

Clasa a VI-a

CG:149 Să se arate că ecuația $x^2 + 8 = y^4$ nu are soluții în mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Mihail Bencze, profesor, Brașov

CG:150 În caroiajul alăturat se dau punctul C și M centrul pătrățelului în care este situat. Duceți,



folosind numai o riglă negradată, perpendiculara în M pe segmentul CM .

Nicolae Ivășchescu, profesor, Craiova

CG:151 Fie patrulaterul $ABCD$ în care avem $[CB] \equiv [CD]$ și $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle C) = 90^\circ$. Pe dreapta AD considerăm punctul E astfel încât $[DE] \equiv [AB]$ și $D \in (AE)$. Să se arate că triunghiul $\triangle ACE$ este dreptunghic.

Babis Stergiou, profesor, Grecia.

CG:152 Să se determine restul împărțirii numărului natural $69^{2010} + 2010$ la 1587.

Mariana Coadă, profesor, Galați

Clasa a VII-a

CG:153 În triunghiul $\triangle ABC$ notăm cu O intersecția înălțimii $[AD]$ cu bisectoarea (BE a unghiului $\sphericalangle ABC$, unde $D \in (BC)$, $E \in (AC)$). Știind că $[OA] \equiv [OB]$ să se arate că $\triangle ABE$ este isoscel dacă și numai dacă $m(\sphericalangle C) = 45^\circ$.

Cecilia Solomon, profesor, Galați

CG:154 Să se arate că $A = \frac{2^{2010} + 1}{2665}$ este număr natural compus.

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

CG:155 Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a^2 + b^2 = c^2$, atunci să se scrie expresia $E = a^3 + b^3 + c^3$ sub formă de produs.

Babis Stergiou, profesor, Grecia.

CG:156 Să se afle primele două cifre ale numărului $\sqrt{1357911131517\dots 20072009}$.

Mariana Coadă, profesor, Galați

Clasa a VIII-a

CG:157 Fie $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $x \cdot y \cdot z = 1$. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{\sqrt{x} \cdot (y+z)} + \frac{1}{\sqrt{y} \cdot (z+x)} + \frac{1}{\sqrt{z} \cdot (x+y)} \leq \frac{3}{2}.$$

Marius Cristian Manole, elev, Galați

CG:158 Arătați că există un singur segment cu extremitățile pe reprezentarea geometrică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ care are lungimea exprimată printr-un număr natural prim și coordonatele extremităților numere întregi.

Gheorghe Pădurariu, profesor, Galați

CG:159 Să se arate că toate ecuațiile de gradul al II-lea, cu coeficienții ecuației distincți doi câte doi, din mulțimea $\{2; 1-3\}$, au o rădăcină comună.

Apostol Constantin, profesor, Rm. Sărat

CG:160 Să se determine partea întreagă a numărului real $a = (2 - \sqrt{5})^{2009} + (2 - \sqrt{2})^{2009}$

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Clasa a IX-a

CL:145 Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Demonstrați că

$$a \cdot b \cdot c \cdot (a + b + c) + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2 \cdot c^2 \cdot a^2 \leq 1.$$

Cristinel Mortici

CL:146 Găsiți toate numerele reale x care se pot scrie în mod unic sub forma $x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq b$ și $a + b + 1 = 3 \cdot a \cdot b$.

Paul Cosma, elev, Galați

CL:147 Fie numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$ ce satisfac relația $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 - 1} = 1$. Demonstrați că

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i + 1} \leq \frac{n}{\sqrt{n+1} + 1}.$$

Andrei Razvan Băleanu, elev, Motru

CL:148 Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{M\} = AC \cap BD$, $O_1, O_2, O_3, O_4, H_1, H_2, H_3, H_4$ centrele cercurilor circumscrise, respectiv ortocentrele triunghiurilor $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$, $\triangle DAM$. Să se arate că $\overline{O_1O_4} = \overline{O_2O_3} \Leftrightarrow \overline{O_1H_2} + \overline{O_3H_4} = \overline{O_2H_1} + \overline{O_4H_3}$.

Sorin Pîrlea, profesor, Motății, Dolj

Clasa a X-a

CL:149 Fie $n \geq 3$ un număr natural fixat. Să se demonstreze că pentru orice $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ are

loc inegalitatea
$$\frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \sqrt{\frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_4}} + \sqrt[3]{\frac{a_3 + a_4}{a_4 + a_5}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{a_n + a_1}{a_1 + a_2}} > \frac{n}{n-1}.$$

(Pentru $n = 3$ se obține problema L:1041 din RMG nr. 30/2008, pagina 87)

Andrei Crișan, elev și Sorin Ulmeanu, Pitești

CL:150 Să se demonstreze că în orice triunghi are loc relația $(R+r)^3 \geq 3 \cdot \sqrt{3} \cdot p \cdot r^2$.

Nicușor Minculete, profesor, Sfântu Gheorghe

CL:151 Să se rezolve în \mathbb{R}^3 sistemul
$$\begin{cases} 5^x + 12^y = 13^x \\ 5^y + 12^z = 13^y \\ 5^z + 12^x = 13^z \end{cases}.$$

Florin Antohe, profesor, Galați

CL:152 Determinați numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \in (1; +\infty)$ care satisfac condițiile $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 2^n$ și $\log_{a_1}(a_1 - 1) + \log_{a_2}(a_2 - 1) + \dots + \log_{a_n}(a_n - 1) = 0$.

Dan Seclăman și Lucian Tuțescu, Craiova

Clasa a XI-a

CL:153 Fie $OABC$ un pătrat de latură 1. Construim șirul de puncte $(A_n)_{n \geq 1}$ astfel: A_1 este mijlocul segmentului $[AB]$, A_2 este mijlocul segmentului $[BC]$, A_3 este mijlocul segmentului $[OC]$, A_4 este mijlocul segmentului $[OA_1]$, A_5 este mijlocul segmentului $[A_1A_2]$, A_6 este mijlocul segmentului $[A_2A_3]$ și așa mai departe. Dacă A_n are coordonatele $(x_n; y_n)$, atunci să se studieze convergența șirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$.

Cerasela Momoiu, profesor, Galați

CL:154 Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ și $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ cu proprietățile $x_{n+1} = x_n - \alpha \cdot x_n^2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1 \in \left(0; \frac{1}{\alpha}\right)$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot x_n) \stackrel{\text{notație}}{=} l$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (n \cdot x_n - l)$.

Mihai Dragoș Totolici, profesor, Galați

CL:155 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și matricele inversabile $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $B \cdot (I_n + A^{-1}) + I_n = A \cdot (I_n + B^{-1})$. Să se arate că $\det(A - B) \neq 0$.

Ionuț Ivănescu, profesor, Craiova

CL:156 Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(x+y) - 3 \cdot x^2 \cdot y^2 = f(x) + f(y) + 2 \cdot x \cdot y \cdot (x^2 + y^2), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Cristian Moanță, profesor, Craiova

Clasa a XII-a

CL:157 Fie (G, \cdot) un grup și $a, b \in G$ astfel încât $a^2 = e$ și $b = a^{-1} \cdot b^5 \cdot a$. Să se arate că $b^{15} = a \cdot b^3 \cdot a$.

Alfred Eckstein și Viorel Tudoran, Arad

CL:158 Să se determine funcțiile continue $f, g: \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care avem $f(x) = -G(x) \cdot \operatorname{tg}^2 x$,

$$F(x) = g(x) \cdot \operatorname{tg}^2 x, \text{ pentru orice } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ unde } F \in \int f(x) dx \text{ și } G \in \int g(x) dx.$$

Florin Stănescu, profesor, Găești

CL:159 Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ cu proprietatea că există elementele inversabile $x, y \in A$ astfel încât $x + x^{-1} = 1 + y + y^{-1}$. Să se arate că $x - y$ este inversabil în inelul A .

Laura Popescu, profesor, Craiova

CL:160 Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = \frac{x^2 + x}{2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$. Să se arate că $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{3}{2}$.

Gheorghe Tutulan, profesor, Galați

PROBLEME PROPUSE

Clasa a V-a

G:1166 Se consideră numerele $A = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50}$ și $B = \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 4} + \frac{4}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{4}{49 \cdot 50}$.
Comparați numerele A și B .

Radu Balint și Eliza Grigoriță, elevi, Galați

G:1167 Arătați că numărul $a = 6^{2^n} \cdot 3 - 2^{2^{n+1}} \cdot 3^{2^n - 2}$ este pătrat perfect.

Maria Hahui, profesor, Galați

G:1168 Să se determine numerele naturale \overline{xy} , în baza zece, cu proprietatea $\frac{\overline{xy}}{yx} = 2 - \frac{y}{x}$.

Corneliu Hahui, profesor, Galați

G:1169 Fie S suma cifrelor numărului natural $a = 1000^{23} - 100023$. Să se afle restul împărțirii lui S la 19.

Viorica Bujor, profesor, Galați

G:1170 Un număr de patru cifre are primele trei cifre identice, iar a patra cifră este egală cu 8. Acest număr se împarte la un număr de două cifre și se obține restul 98. Să se afle numărul de patru cifre.

Florin Antohe, profesor, Galați

G:1171 Demonstrați că fracția $\frac{223 \cdot n + 1}{2007 \cdot n + 8}$ este ireductibilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Nicolae Ivășchescu, profesor, Craiova

G:1172 Un ogar urmărește o vulpe care are 100 de sărituri (de-ale vulpii) înaintea lui. Se știe că în timp ce ogarul face 7 sărituri, vulpea face 9 sărituri, iar 5 sărituri ale ogarului fac cât 7 sărituri ale vulpii. Câte sărituri trebuie să facă ogarul pentru a prinde vulpea?

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

G:1173 Câte numere naturale de cinci cifre coincid cu răsturnatul său?

Constantin Dragomir, profesor, Pitești

Clasa a VI-a

G:1174 Fie un triunghi dreptunghic $\triangle ABC$ ($m(\sphericalangle A) = 90^\circ$) și $[AD]$ mediana corespunzătoare ipotenuzei. Să se arate că oricum am alege punctul E pe dreapta AD , segmentele $[AE]$, $[ED]$ și $[BD]$ nu pot fi laturile unui triunghi.

Constanța Gusta, profesor, Galați

G:1175 Fie $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a+2) \cdot (b+2) = a+b+6$. Să se arate că $a+b=2$.

Maricel Manea, profesor, Munteni, Galați

G:1176 Să se afle numerele naturale de forma \overline{xyz} , știind că $\overline{xyz} + 5 = (x-4)^{2009} + y^3 + z^2$.

Tatiana Saulea, profesor, Galați

G:1177 În interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ cu măsura de 90° , se consideră semidreapta $(OX$ astfel încât $m(\sphericalangle AOX) = 37^\circ 17'$. Dacă punctul M este situat în interiorul unghiului $\sphericalangle BOX$, atunci să se determine câte semidrepte $(OM$ au proprietatea că $m(\sphericalangle AOM) = n^\circ$, unde $n \in \mathbb{N}^*$

Ionel Patriche, profesor, Galați

G:1178 Să se determine numerele naturale prime p, q, r care satisfac relația:

$$(p+1) \cdot (q^2 - p^2) \cdot (5 \cdot r - 1) = p^2 \cdot r^6.$$

Dana Paponiu, profesor, Drobeta Tr. Severin

G:1179 Să se determine numerele naturale prime distincte \overline{ad} , \overline{bd} , \overline{cd} și d care satisfac relația: $\overline{ad} + d = \overline{bd} + \overline{cd}$.

Marica Ștefan, profesor, Drobeta Tr. Severin

G:1180 Fie $A = \frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 25} + \dots + \frac{1}{2001 \cdot 2009}$. Să se arate că $\frac{251}{A}$ este un număr natural divizibil cu 2009.

Cătălina Drăgan, profesor, Galați

G:1181 Arătați că numărul natural $n = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2009}$ este divizibil cu 19608.

Liliana Curduman, profesor, Galați

Clasa a VII-a

G:1182 Fie $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a}{b+9} = \frac{a-13}{b}$. Determinați cea mai mare valoare posibilă a raportului $\frac{a}{b}$.

Manuela Totolici, profesor, Galați

G:1183 Arătați că $|x-2005|+|x-2006|+|x-2007|\geq 2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Nicolae Ivășchescu, profesor, Craiova

G:1184 Să se arate că 342 divide $7^{17}+293$.

Maricel Manea, profesor, Munteni, Galați

G:1185 Să se calculeze partea întreagă a numărului real

$$a = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{7})} + \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5}-\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})} + \frac{7 \cdot \sqrt{7}}{(\sqrt{7}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7}-\sqrt{5})}.$$

Mihail Bencze, profesor, Brașov

G:1186 Câte valori naturale poate lua numărul natural $A = \frac{7 \cdot n + 4}{5 \cdot n + 3} + \frac{13 \cdot m + 8}{5 \cdot m + 3}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

G:1187 Să se rezolve ecuația: $\frac{x+1}{4} + \frac{x+2}{5} + \frac{x+3}{6} + \dots + \frac{x+2010}{2013} = \frac{2010^2}{2009} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2010} \right)$.

Florin Antohe, profesor, Galați

G:1188 Fie un triunghi ΔABC dreptunghic în A . Dacă mediatoarea ipotenuzei intersectează dreapta AC în M , D este simetricul lui B față de A , E este simetricul lui M față de CD și $OM \perp ME$, $O \in AB$, atunci să se arate că $OE \parallel BC$.

Maricel Manea, profesor, Munteni, Galați

G:1189 Să se demonstreze că numărul $n = 5^{5^n} + 5^{2 \cdot n - 1} + 5^{5 \cdot n + 1}$ este divizibil cu 31, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Duța Culachi, profesor, Galați

Clasa a VIII-a

G:1190 Să se determine mulțimea $A = \left\{ (m; n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \sqrt{m^2 + 4 \cdot m + 1} + \sqrt{n^2 - 3 \cdot n + 1} \in \mathbb{N} \right\}$.

Manuela Totolici, profesor, Galați

G:1191 Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = p$ și $q = \sqrt{(a^2 + p) \cdot (b^2 + p) \cdot (c^2 + p)}$, atunci arătați $(a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3 \cdot q$.

Constantin Dragomir, profesor, Pitești

G:1192 Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x + [y] = 17,8 \\ 2 \cdot [x] + y = 26,9 \end{cases}$.

Gheorghe Huțanu, profesor, Galați

G:1193 Fie M un punct interior triunghiului echilateral ΔABC astfel ca $m(\sphericalangle BMC) = 150^\circ$. În punctul M se ridică perpendiculara d pe planul triunghiului ΔABC . Demonstrați că pentru orice punct $V \in d, V \neq M$ segmentele $[VA], [VB]$ și $[VC]$ pot fi laturile unui triunghi ascuțitunghic.

Petre Bătrânețu, profesor, Galați

G:1194 Fie $S = \frac{1}{4 \cdot x + 1} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot x} + \frac{1}{2 \cdot x + 1} \right) + \frac{1}{4 \cdot x + 3} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot x + 1} + \frac{1}{2 \cdot x + 2} \right) + \frac{1}{4 \cdot x + 5} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot x + 2} + \frac{1}{2 \cdot x + 3} \right)$, unde $x \in \mathbb{N}$. Să se arate că $S \notin \mathbb{N}$ pentru orice $x \in \mathbb{N}$.

Alina Gabriela Țepeș, profesor, Galați

G:1195 În triunghiul echilateral ΔABC se notează cu O centrul cercului circumscris și cu M, N, P și P mijloacele laturilor $[AB], [BC], [AC]$. Se îndoiește triunghiul de-a lungul dreptelor MN, NP și MP astfel încât planele $(AMP), (BNP), (CNP)$ să fie perpendiculare pe planul (MNP) . Să se demonstreze că centrul de greutate al triunghiului ΔABC obținut după îndoire se proiectează pe planul (MNP) în punctul O .

Mariana Anton, profesor, Galați

G:1196 Dacă $x, y \in [0; 1], x = \frac{y+1}{2}$, atunci arătați că $\sqrt{x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 6 \cdot y + 10} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2 \cdot y + 1} = \sqrt{5}$.

Dumitra Matei-Dragomir, profesor, Tecuci

G:1197 Fie $ABCD A' B' C' D'$ o prismă patrulateră regulată. Pe segmentul $[AC]$ se consideră punctele E și F astfel încât $[AE] \equiv [CF] \equiv [AB]$. Știind că $AB = 6 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$ și $AA' = 6 \text{ cm}$, să se calculeze sinusul unghiului format de dreptele $A'D$ și BC' .

Adrian Izvoranu, elev, Galați

Clasa a IX-a

L:1166 În planul triunghiului ΔABC se consideră un punct $D \notin AB \cup BC \cup CA$. Dacă G, G_1, G_2, G_3 , respectiv G' sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $\Delta ABC, \Delta DAB, \Delta DBC, \Delta DCA, \Delta G_1 G_2 G_3$, atunci să se arate că $\Delta G_1 G_2 G_3 \sim \Delta ABC$ și că punctele D, G, G' sunt coliniare.

Nineta Oprescu și Mihaela Nascu, Craiova

L:1167 Să se determine cardinalul mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid x = n^2 - 7 \cdot n + 3, n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 100 \right\}$.

Cristian Marius Manole, elev, Galați

L:1168 Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} \left[\frac{x-6}{2} \right] = \frac{3 \cdot y + 1}{4} \\ \left[\frac{y+1}{4} \right] = 2 \cdot x + 1 \end{cases}$$
.

Laura Radu, profesor, Galați

L:1169 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + 1 < 0$. Să se arate că $\frac{a^2 + b^2}{2} > 4 \cdot (a + b) - a \cdot b$.

Dumitra Șerban, profesor, Galați

L:1170 Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general

$$a_n = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{n^3 \cdot (n+1)^3} + 3 \cdot \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{n^2 \cdot (n+1)^2} \right], \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Să studieze monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galați

L:1171 Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\left[\frac{3 \cdot x - 1}{6} \right] + \left[\frac{x + 1}{2} \right] + \left[\frac{3 \cdot x + 1}{6} \right] = \frac{5 \cdot (x + 1)}{4}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Radu Marius Tătaru, profesor, Galați

L:1172 Să se demonstreze că $\frac{(b+c)^2}{a+c} + \frac{(a+c)^2}{a+b} \geq 4 \cdot (c-a)$, pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Constantin Ursu, profesor, Galați

L:1173 Să se demonstreze că în orice patrulater convex $ABCD$ are loc inegalitatea

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{D}{2} \leq \frac{(a+b+c+d) \cdot (e+f)}{4 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}},$$

unde a, b, c, d sunt lungimile laturilor, iar e și f sunt lungimile diagonalelor patrulaterului $ABCD$.

Nicușor Minculete, profesor, Sfântu Gheorghe

Clasa a X-a

L:1174 Să se rezolve în \mathbb{R}_+^* sistemul $\begin{cases} 2^{x-2} + 2^{y-2} = 2 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2 \end{cases}$.

Virginia Grigorescu, profesor, Craiova

L:1175 Să se determine minimul expresiei $E(x; y) = x \cdot y + 2 \cdot x - y$, unde $(x; y) \in (-1; 1) \times (-2; 1)$,

știind că $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-x}{2} \right) \cdot \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2+y}{3} \right) = \frac{1}{4}$.

Manuela Totolici, profesor, Galați

L:1176 Fie $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ cu $x + y + z = 1$. Să se demonstreze că $\log_x(x^2 + y^2 + z^2) + \log_y(x^2 + y^2 + z^2) + \log_z(x^2 + y^2 + z^2) \leq x \cdot \log_x(x \cdot y \cdot z) + y \cdot \log_y(x \cdot y \cdot z) + z \cdot \log_z(x \cdot y \cdot z)$.

Andrei-Costin Dobrin, elev, Galați

L:1177 Să se determine partea întreagă a numărului real $a = \log_4 5 + \log_5 7 + \log_7 11 + \log_{11} 16$.

Laura Radu, profesor, Galați

L:1178 Fie $z \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}$, prime între ele, astfel încât $z^m \in \mathbb{R}$ și $z^n \in \mathbb{R}$. Să se arate că $z \in \mathbb{R}$.

Ana Cismaru, profesor, Malu Mare, Dolj

L:1179 Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\sin 2x + \sin 3x = m \cdot \sin x$, unde m este un parametru real.

Veronica Grigore, profesor, Galați

L:1180 Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\lg(x+7990) - \lg(x-1010) = 1$.

Mircea Mario Stoica, profesor, Arad

L:1181 Să se rezolve în \mathbb{R}^3 sistemul $\log_a x + \log_b y = \log_a y + \log_b z = \log_a z + \log_b x = 1$, unde $a, b > 1$ și să se arate că $x_0, y_0, z_0 \in (0; \sqrt[4]{a \cdot b}]$ pentru orice soluție $(x_0; y_0; z_0)$ a sistemului.

Mihail Bencze, profesor, Brașov

Clasa a XI-a

L:1182 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a \cdot n + 1}{\sqrt{n^2 + 2}} \right)^{b \cdot n^2}$, unde $a \in \mathbb{R}_+^*$ și $b \in \mathbb{R}^*$. Discuție.

Iulian Știubianu, profesor, Galați

L:1183 Să se arate că
$$\begin{vmatrix} x + \sqrt[3]{x^2} & \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{x} + x \\ y + \sqrt[3]{y^2} & \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{y} & \sqrt[3]{y} + y \\ z + \sqrt[3]{z^2} & \sqrt[3]{z^2} + \sqrt[3]{z} & \sqrt[3]{z} + z \end{vmatrix} = 2 \cdot \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \cdot (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}) \cdot (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}) \cdot (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x}).$$

Rodica și Dumitru Bălan, profesori, Galați

L:1184 Se consideră $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ și numerele complexe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$, distincte două câte două astfel încât $x_i \cdot x_j \neq 1$, pentru orice $i, j \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$, $i \neq j$. Dacă $A, B \in M_{2n}(\mathbb{C})$ au proprietatea că $\det(x_i \cdot A - B) = \det(A - x_i \cdot B)$ pentru orice $i \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$, atunci să se arate că $\det A = \det B$.

Mihai Dragoș Totolici, profesor, Galați

L:1185 Rezolvați în mulțimea $(1; +\infty)$ ecuația $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot x - 3 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2} = 0$.

Dumitra Șerban, profesor, Galați

L:1186 Fie funcția $f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă, cu derivata continuă. Să se demonstreze că există $x_0 \in [0; 4]$ astfel încât $f'(x_0) - f^2(x_0) < 1$.

Cristina Maria-Robu, profesor, Galați

L:1187 Se consideră funcția $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $f(X) = 2009 \cdot X^3 - 2010 \cdot X^2 - 2009 \cdot X + 2010 \cdot I_2$. Să se cerceteze dacă funcția f este inversabilă.

Cătălina Drăgan, profesor, Galați

L:1188 Fie $(A_n)_{n \geq 0}, (B_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{Q}$ cu proprietatea $(1 + \sqrt{3})^n = A_n + B_n \cdot \sqrt{3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$.

Veronica Grogore, profesor, Galați

L:1189 Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit astfel $x_0 = \frac{5}{2}$, $x_{n+1} = x_n^3 - 6 \cdot x_n^2 + 12 \cdot x_n - 6$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Viorel Tudoran și Alfred Eckstein, Arad

Clasa a XII-a

L:1190 Să se calculeze $\int \frac{\ln^2 x + 1}{(1 + \ln x)^2} dx$, unde $x \in \left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$.

Iulian Știubianu, profesor, Galați

L:1191 Fie funcția continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $x \geq \int_0^x f(t) dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $f(0) = 1$.

Iulian Micu, profesor, Craiova

L:1192 Determinați numărul real a pentru care există o funcție continuă $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și o primitivă a sa notată $F : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât să fie satisfăcute simultan condițiile: $\int_{-1}^1 x \cdot f(x) dx = 0$ și $F(x) + F(-x) = a \cdot x^{2n}$, pentru orice $x \in [-1; 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, n fixat.

Manea Cosmin și Dragoș Petrică, Pitești

L:1193 Să se calculeze $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \cdot e^{\sin x}}{e^{\sin x} + 1} dx$.

Viorel Tudoran și Alfred Eckstein, Arad

L:1194 Să se rezolve în $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ sistemul
$$\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2} \cdot x - y = a \\ x^2 + b \cdot y^2 = b \end{cases}$$
, unde $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Discuție.

Ion Toderiță, profesor, Galați

L:1195 Să se calculeze $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2009 + \sin 2x}} dx$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Cristina-Maria Robu, profesor, Galați

L:1196 Fie mulțimea $M = \left\{ f_p \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_p(x) = a^p \cdot x + \frac{a^p - 1}{a - 1}, p \in \mathbb{R} \right\}$, unde $a > 1$ este fixat.

Să se arate că (M, \circ) este un grup izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$, unde „ \circ ” este compunerea funcțiilor.

Ioan Toderiță, profesor, Galați

L:1197 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \cdot \int_0^1 x^{2^k - 1} \cdot (1 - x^2)^n dx$.

(Generalizarea problemelor L:1131 subpunctele a), c), pagina 83, RMG nr. 32 și L:1165, pagina 88, RMG 33).

Vasile Popa, profesor, Galați

PROBLEME PREGĂTITOARE
pentru
Olimpiada Internațională de Matematică

O:127 Spunem că o mulțime are *picățele* dacă poate fi reprezentată ca o reuniune de crecuri nedegenerate și disjuncte.

a) Dacă A și B sunt două puncte distincte pe o sferă S , atunci arătați că $S \setminus \{A; B\}$ are picățele.

b) Fie T o bilă deschisă de centru O și rază $r \in \mathbb{R}_+^*$ (mulțimea punctelor P din spațiu cu proprietatea ca $OP < r$) și un punct C astfel încât $OC = r$. Arătați că $T \cup \{C\}$ are picățele.

c) Arătați că spațiul are picățele.

Paul Cosma, elev, Galați.

O:128 Fie patrulaterul convex $ABCD$ având $AB = CB$, $m(\sphericalangle ABC) + 2 \cdot m(\sphericalangle CDA) = \pi$ și E mijlocul diagonalei $[AC]$. Demonstrați că $\sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle BDA$,

Paolo Leonetti

O:129 Fie M o mulțime cu exact 2010 elemente, numere întregi consecutive. Arătați că nu există două mulțimi A și B cu proprietățile $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$ și $\prod_{a \in A} a = \prod_{b \in B} b$.

Paul Cosma, elev, Galați

O:130 Să se rezolve în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuația $2 + 3^x = 5^y$.

Vasile Popa, profesor, Galați