

Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național "Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
ediția a XX-a
Galați, 2 noiembrie 2019

Clasa a XII -a

Problema 1.

a) Să se determine primitivele funcției $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(3n-2)e^{nx} - 3\sin x - 2\cos x}{e^{nx} + \cos x}$.

b) Se consideră funcția $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe intervalul $[0; +\infty)$ care verifică relația $f(x)(\arctg x + e^{-x}) + F(x)\left(\arctg x + \frac{1}{1+x^2}\right) = 0$, $\forall x \in [0; +\infty)$, unde F este o primitivă a funcției f cu $F(0) = 1$. Să se determine funcția f .

Mihai Totolici, profesor, Galați

Problema 2.

Fie (G, \cdot) un grup cu următoarele proprietăți:

a) Ecuația $x^2 = e$ are soluție unică în G (e este elementul neutru al grupului);

b) $(xy)^2 = (yx)^2$, $\forall x, y \in G$.

Să se demonstreze că grupul (G, \cdot) este comutativ.

* * *

Problema 3.

a) Fie $f : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ o funcție derivabilă pe intervalul $(0, 1]$ cu proprietatea că $f(1) = 0$ și care verifică relația $f'(x) \cdot (x + f(x)) = f(x) - x$, $\forall x \in (0, 1]$. Se consideră funcția

$g : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Să se determine funcția $F : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ care verifică relația $(F \circ g)(x) = x$, $\forall x \in (0, 1]$ și să se justifice existența și unicitatea funcției f .

Vasile Popa, profesor, Galați

b) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $f(x+y) \geq (1+y)f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in [0; +\infty)$;

(ii) Funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$, $g(x) = e^{-x}f(x)$ este monoton crescătoare.

* * *