Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național ”Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică ”Cristian S. Calude”
ediția a XX-a
Galați, 2 noiembrie 2019

Clasa a IX –a

SOLUȚII

Problema 1.
Soluție:

a) Prin înmulțire cu $2\cdot x\cdot y\cdot z>0$ inegalitatea devine :

$$\frac{2\cdot x\cdot y}{x+y}\cdot z+\frac{2\cdot y\cdot z}{y+z}\cdot x+\frac{2\cdot z\cdot x}{z+x}\cdot y\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$$

Din inegalitatea dintre media armonică și media aritmetică avem:

$$\frac{2\cdot x\cdot y}{x+y}\cdot z+\frac{2\cdot y\cdot z}{y+z}\cdot x+\frac{2\cdot z\cdot x}{z+x}\cdot y\le\frac{x+y}{2}\cdot z+\frac{y+z}{2}\cdot x+\frac{z+x}{2}\cdot y=x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x$$

Rămâne astfel de demonstrat că $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$ care se reduce la inegalitatea binecunoscută $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x\le x^2+y^2+z^2$.

b) Notăm $\frac{4\cdot x+4}{x^2+4}=t, t\in\mathbb{R}$ și ecuaţia devine :

$\{t+2\}\cdot[t]=t-1\Leftrightarrow[t]\cdot\{t\}-[t]-\{t\}+1=0$ sau $([t]-1)\cdot(\{t\}-1)=0$ și cum $\{t\}\ne1$ urmează imediat $[t]=1\Leftrightarrow1\le t<2\Leftrightarrow1\le\frac{4x+4}{x^2+4}<2$ de unde avem $x^2-4x\le0$ cu soluţia $x\in[0,4]$.

Problema 2.
Soluție:

a) Se impun condiţiile: $x+1\ge0$ (1) și $y+1\ge0$ (2).

Prima ecuaţie a sistemului se scrie succesiv:

$$x^5+y^5-(x+y)-2\cdot x^2\cdot y^2+2=0\Leftrightarrow x^5+y^5-(x+y)+\left(x^2-y^2\right)^2-\left(x^4+y^4\right)+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^5-x-x^4+1\right)+\left(y^5-y-y^4+1\right)+\left(x^2-y^2\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(x^4-1\right)-\left(x^4-1\right)+y\cdot\left(y^4-1\right)-\left(y^4-1\right)+\left(x^2-y^2\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^4-1\right)\cdot(x-1)+\left(y^4-1\right)\cdot(y-1)+\left(x^2-y^2\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot(x+1)+(y-1)^2\cdot\left(y^2+1\right)(y+1)+\left(x^2-y^2\right)^2=0 \qquad (3)$$

Conform relaţiilor (1) și (2) avem că $x+1\geq 0, y+1\geq 0$ deci toţi termenii din membrul stâng al ecuaţiei (3) sunt pozitivi.
Egalitatea (3) poate avea deci loc numai dacă toţi termenii sunt nuli. Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} (x-1)^2\cdot(x+1)=0 \\ (y-1)^2\cdot(y+1)=0 \\ \left(x^2-y^2\right)^2=0 \end{cases} \text{ cu soluţiile : } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Se verifică ușor că toate aceste soluţii satisfac și ecuaţia a doua a sistemului deci acestea sunt soluţiile finale.

b) Evident $k\neq 0$. Arătăm că numărul $k=1$ este bun.
Într-adevăr $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ iar dacă presupunem că $\frac{1}{2}+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{l-1}}=1$ cu $2<x_1<...<x_{l-1}$

atunci $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x_1}+...+\frac{1}{x_{l-1}}\right)=1$ iar $2<4<2\cdot x_1<...<2\cdot x_{l-1}$.

Prin urmare , dacă 1 se scrie ca sumă de l termeni distincţi de forma $\frac{1}{s}$ atunci 1 se poate scrie și ca sumă de $l+1$ asemenea termeni.
În continuare arătăm că 1 este singura valoare convenabilă pentru k.
Într-adevăr pentru $k\geq 2$ și numerele naturale $2\leq a_1<a_2<...<a_n$ au loc inegalităţile:

$$\frac{1}{a_1^k}+\frac{1}{a_2^k}+...+\frac{1}{a_n^k}\leq\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+...+\frac{1}{a_n^2}\leq\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n+1)^2}<$$
$$<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$$

Deci $k\geq 2$ este imposibil, ceea ce înceie demonstraţia.

Problema 3.
Soluție: Evident cercurile pot fi doar tangente interior și în acest caz distanţa dintre centre este egală cu diferenţa razelor. Presupunem că cercul C_c nu este tangent cercului înscris în ΔABC.
Notăm cu M_a mijlocul laturii $[BC]$ și cu N_a mijlocul medianei $[AM_a]$. Acum deoarece cercul C_a este tangent (interior) cercului înscris de centru I în triunghiul ΔABC avem :

$$\frac{AM_a}{2}-r=IN_a \text{ sau } 2\cdot IN_a=AM_a-2\cdot r \qquad (*)$$

Aplicăm teorema medianei în triunghiurile ΔABC și ΔIBC și obţinem:

$$4\cdot AM_a^2=2\cdot\left(b^2+c^2\right)-a^2 \quad \text{și respectiv} \quad 4\cdot IM_a^2=2\cdot\left(IB^2+IC^2\right)-a^2$$

Dacă I este centrul cercului înscris avem relaţiile : $IA^2=r^2+\left(p-a\right)^2$, $IB^2=r^2+\left(p-b\right)^2$ și $IC^2=r^2+\left(p-c\right)^2$ și înlocuind mai sus obţinem:

$$IM_a^2=\frac{2\cdot r^2+2\cdot(p-b)^2+2\cdot r^2+2\cdot(p-c)^2-a^2}{4}=r^2+\frac{4\cdot p^2-4\cdot p\cdot b-4\cdot p\cdot c+2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2}{4}=$$
$$=r^2+p\cdot(p-b-c)+\frac{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2}{4}=r^2+\frac{(a+b+c)\cdot(a-b-c)}{4}+\frac{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2}{4}=$$

$$= r^2 + \frac{a^2 - (b+c)^2 + 2\cdot b^2 + 2\cdot c^2 - a^2}{4} = r^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

Aplicăm acum teorema medianei în triunghiul ΔAIM_a și avem

$$4\cdot IN_a^2 = 2\cdot IA^2 + 2\cdot IM_a^2 - AM_a^2 = 2\cdot\left[r^2 + (p-a)^2\right] + 2\cdot\left[r^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2\right] - AM_a^2$$

Dar din relaţia (*) obţinem $4IN_a^2 = (AM_a - 2\cdot r)^2$.

Egalând ultimele două relaţii avem:

$2\cdot AM_a^2 - 4\cdot r\cdot AM_a + 4\cdot r^2 = 4\cdot r^2 + 2\cdot(p-a)^2 + 2\cdot\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ sau înjumătăţind obţinem:

$$AM_a^2 - 2\cdot r\cdot AM_a = (p-a)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2\cdot b^2 + 2\cdot c^2 - a^2}{4} - 2\cdot r\cdot AM_a = \frac{(b+c-a)^2 + (b-c)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot r\cdot AM_a = \frac{2\cdot b^2 + 2\cdot c^2 - a^2 - (b+c-a)^2 - (b-c)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\cdot r\cdot AM_a = \frac{a\cdot(2b+2c-2a)}{4} = a\cdot(p-a)$. De aici avem

$$4\cdot r^2\cdot AM_a^2 = a^2\cdot(p-a)^2 \Leftrightarrow \frac{S^2}{p^2}\cdot\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) = a^2\cdot(p-a)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (p-b)\cdot(p-c)\cdot\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) = a^2\cdot p\cdot(p-a)$ și după desfacerea termenilor și efectuarea calculelor ajungem la $(b-c)^2\cdot(b^2 + c^2 - a^2) = 0$.

Analog se obţine și relaţia $(a-c)^2\cdot\left(a^2 + c^2 - b^2\right) = 0$.

Evident că nici una din expresiile $b^2 + c^2 - a^2$ sau $a^2 + c^2 - b^2$ nu poate fi nulă deoarece ar conduce la un triunghi cu două unghiuri drepte sau la un triunghi dreptunghic în care o catetă este egală cu ipotenuza, deci singura posibilitate este $b = c$ și $a = c$ adică triunghiul ΔABC este echilateral și cercul C_c este de asemenea tangent la cercul înscris.