Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XX -a
Galaţi, 2 noiembrie 2019

Clasa a VIII –a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

a) $\sqrt{x^2+y^2-4y+4}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{2(y-2)^2}=|y-2|\sqrt{2}=(y-2)\sqrt{2}$

....1,5 puncte

$\sqrt{x^2+y^2-6x-10y+34}=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=|y-5|\sqrt{2}=(-y+5)\sqrt{2}$

....1,5 puncte

Finalizare rezultat $3\sqrt{2}$...1 punct

b) $A_{10}=\sqrt{940}=30{,}65\ldots$; $A_{11}=\sqrt{1133}=33{,}66\ldots$; $A_{12}=\sqrt{1344}=36{,}66\ldots$; $A_{13}=\sqrt{1573}=39{,}66\ldots$

Trebuie să arătam că $0{,}66\le A_n-[A_n]<0{,}67, \forall n\ge 11$

Deoarece $3n\le\sqrt{9n^2+4n}<3n+1$ rezultă că $[A_n]=3n$.

....1 punct

$$0{,}66\le A_n-[A_n]<0{,}67 \Leftrightarrow$$

$$0{,}66\le\sqrt{9n^2+4n}-3n<0{,}67 \Leftrightarrow$$

$$396n+\frac{66^2}{100}\le 400n<402n+\frac{67^2}{100}$$

....1 punct

Pentru $n=10$ primele două zecimale ale lui A_n sunt 65, iar pentru $n\ge 11$ primele două zecimale ale lui A_n sunt 66. ....1 punct

Problema 2.

a)

$$\frac{1}{a+b+1} \leq 1 - \frac{a+b}{3} + \frac{2ab}{15} \Leftrightarrow$$

$$15 \leq (15 - 5a - 5b + 2ab)(a + b + 1) \Leftrightarrow$$

....1 punct

$$0 \leq a^2(2b-5) - 2a(2b-5) + b^2(2a-5) - 2b(2a-5) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq a(a-2)(2b-5) + b(b-2)(2a-5).$$

....1 punct

$a - 2 \leq 0$ și $b - 2 \leq 0$

$2a - 5 \leq -1$ și $2b - 5 \leq -1$

....1 punct

b) Se construieşte punctul H simetricul punctului Z faţă de punctul M.

Patrulaterul $BHCZ$ este paralelogram.

....1 punct

Conform cazului $L.U.L$, $\Delta ABH \equiv \Delta DNZ$.

....1 punct

Conform cazului $L.U.L$, $\Delta EAH \equiv \Delta EDZ$.

....1 punct

$EH = EZ$, $[EM]$ mediană, obținem EM înățime. Deci $EM \perp HZ$ iar $m(\sphericalangle EMZ) = 90°$.

....1 punct

Problema 3.

Alegerea metodei de reducere la absurd

....1 punct

Scrierea corectă a negației concluziei

Presupunem prin reducere la absurd că există $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât pentru orice $k \in (1, n]$ există $j \in [0, k)$ astfel încât:

$$\frac{a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_k}{k - j} > \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

....1 punct

În particular pentru $k = n$, există n_1 astfel încât $\frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n_1+1}}{n - n_1} > A$.

Pentru $k = n_1$, există n_2 astfel încât $\frac{a_{n_1} + a_{n_1-1} + \cdots + a_{n_2+1}}{n_1 - n_2} > A$.

Dacă $n_2 > 0$, atunci pentru $k = n_2$, există n_3 astfel încât $\frac{a_{n_2} + a_{n_2-1} + \cdots + a_{n_3+1}}{n_2 - n_3} > A$.

….

Pentru $k = n_r$, $\frac{a_{n_r} + a_{n_r-1} + \cdots + a_1}{n_r} > A$.

....2 puncte

$$\begin{aligned}(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n_1+1}) + (a_{n_1} + a_{n_1-1} + \cdots + a_{n_2+1}) + (a_{n_2} + a_{n_2-1} + \cdots + a_{n_3+1}) + \cdots \\ + (a_{n_{r-1}} + a_{n_{r-1}-1} + \cdots + a_{n_r+1}) + (a_{n_r} + a_{n_r-1} + \cdots + a_1) \\ > A \cdot (n - n_1) + A \cdot (n_1 - n_2) + A \cdot (n_2 - n_3) + \cdots + A \cdot (n_{r-1} - n_r) + A \cdot n_r\end{aligned}$$

....2 puncte

$A > A$ fals. Deci presupunerea făcută este falsă, astfel există un număr natural $k \le n$, astfel încât fiecare dintre cele k numere

$$a_k, \frac{a_{k-1} + a_k}{2}, \frac{a_{k-2} + a_{k-1} + a_k}{3}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

este cel mult egal cu $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

....1 punct