Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Filiala Galaţi**

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri” — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a XIX-a
Galaţi, 10 noiembrie 2018

Clasa a X-a

SOLUŢII

Problema 1.

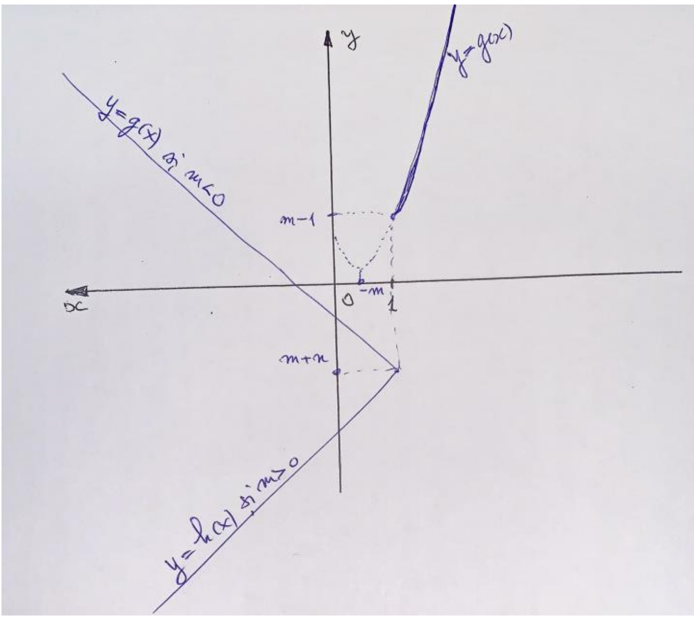
Soluţie. Considerăm funcțiile:

$$g:[1;+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2+2\cdot m\cdot x-m-2 \text{ și } h:(-\infty;1)\to\mathbb{R},\ h(x)=m\cdot x+n.$$

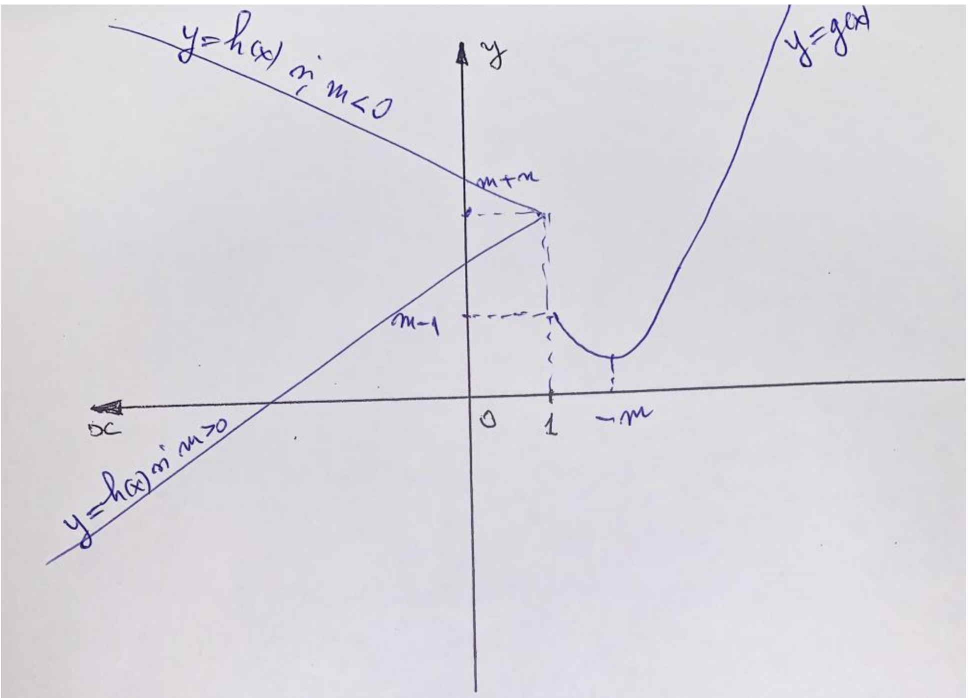
Avem că $f_{m,n}$ este injectivă $\Leftrightarrow$ $(g$ este injectivă$)$ și $(h$ este injectivă$)$ și $\operatorname{Im} g\cap\operatorname{Im} h=\Phi$

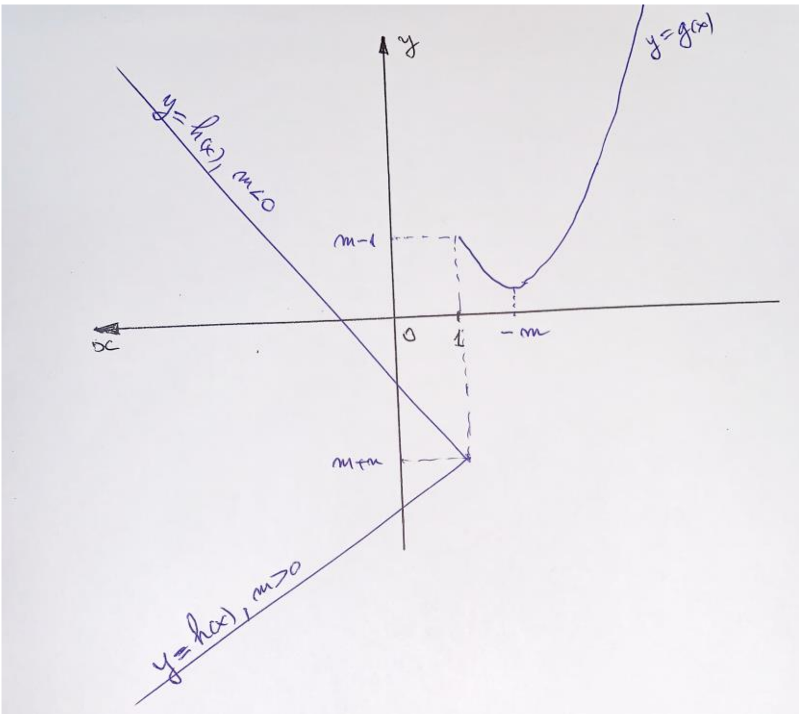
$f_{m,n}$ este surjectivă $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} g\cup\operatorname{Im} h=\mathbb{R}$

Funcția h este injectivă $\Leftrightarrow m\neq 0$ și $\operatorname{Im} h=\begin{cases}(-\infty;\ m+n), & \text{dacă } m>0\\ \{n\}, & \text{dacă } m=0\\ (m+n;\ +\infty), & \text{dacă } m<0\end{cases}$



Funcția g este injectivă $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2\cdot a}\leq 1\Leftrightarrow -m\leq 1\Leftrightarrow m\geq -1$ și $\operatorname{Im} g=\begin{cases}[m-1;+\infty), & \text{dacă } m\geq -1\\ \left[-\left(m^2+m+2\right);+\infty\right), & \text{dacă } m<-1\end{cases}$.





Obținem că $f_{m,n}$ este injectivă $\Leftrightarrow (g$ este injectivă$)$ și $(h$ este injectivă$)$ și $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} h = \Phi$

$f_{m,n}$ este injectivă $\Leftrightarrow m \geq -1$ și $m \neq 0$ și ($m > 0$ și $m+n \leq m-1$) $\Leftrightarrow$ $m > 0$ și $n \leq -1$.

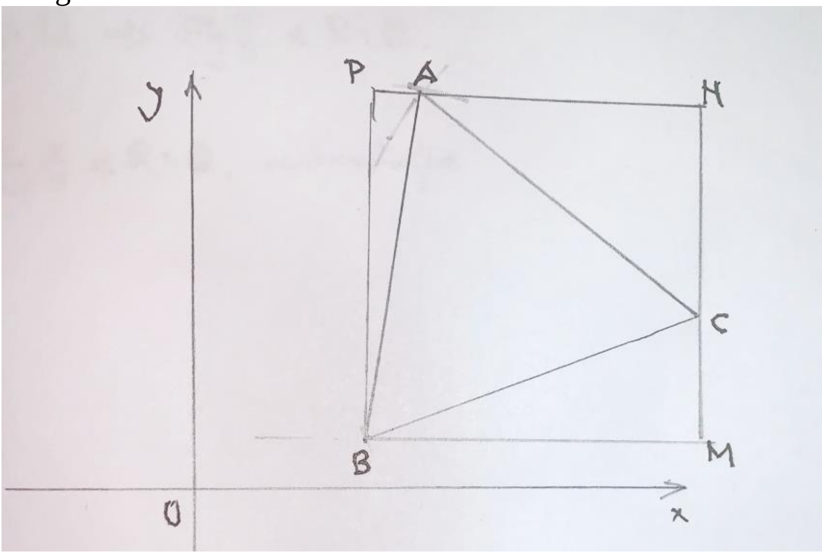
$f_{m,n}$ este surjectivă $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} g \cup \operatorname{Im} h = \mathbb{R}$

$f_{m,n}$ este surjectivă $\Leftrightarrow m > 0$ și $m-1 \leq m+n$ $\Leftrightarrow m > 0$ și $n \geq -1$.

În concluzie, $f_{m,n}$ este bijectivă $\Leftrightarrow m > 0$ și $n = -1$.

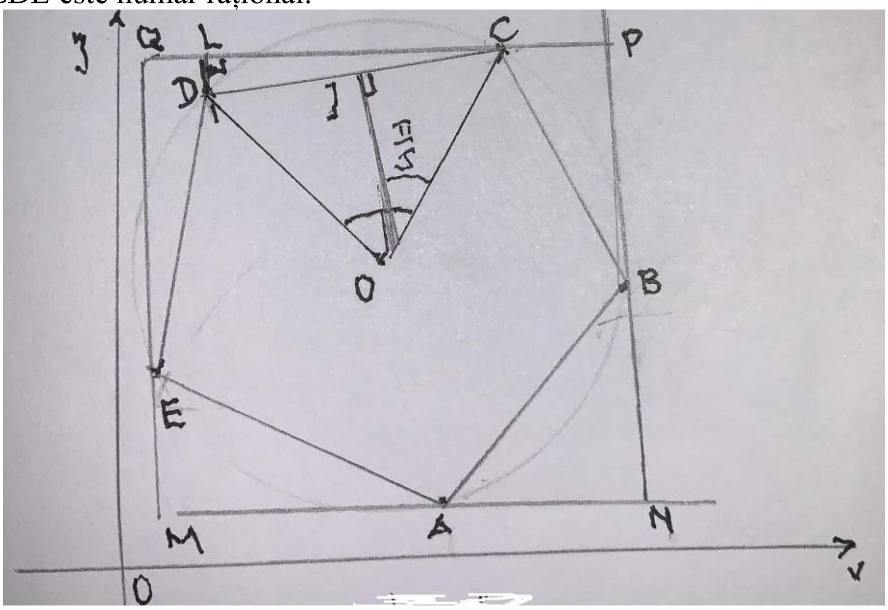
Problema 2.

Soluţie. a) Presupunem că există un triunghi echilateral *ABC* astfel încât toate vârfurile să aibă ambele coordonate numere întregi. Construim dreptunghiul *BMNP* (vezi desenul) cu laturile paralele cu axele de coordonate astfel încât suprafața sa să includă suprafața triunghiului. Punctele *M*, *N*, *P* au ambele coordonate numere întregi.



Aria dreptunghiului este număr natural, deoarece $BM = |x_M - x_B|$, $BP = |y_P - y_B|$ și $x_M, x_N, y_P, y_B \in \mathbb{Z}$, iar ariile triunghiurilor *BMC*, *ACN*, *PAB* sunt numere raționale, de unde deducem că aria triunghiului *ABC* este număr rațional. Dar, $S_{ABC} = \dfrac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $l = AB$, $l^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$, de unde deducem că aria triunghiului *ABC* este număr irațional, contradicție. Presupunerea făcută este falsă, deci nu există niciun triunghi echilateral *ABC* astfel încât toate vârfurile să aibă ambele coordonate numere întregi.

b) Presupunem că există un pentagon regulat *ABCDE* astfel încât toate vârfurile să aibă ambele coordonate numere întregi. Construim dreptunghiul *MNPQ* ca în desenul alăturat în care apar triunghiurile *MAE, ABN, BPC, LDC*, $L = pr_{PQ}D$ și trapezul dreptunghic *EQLD* (vezi desenul) care au ariile numere raționale, aria dreptunghiului *MNPQ* este număr rațional, de unde rezultă că aria pentagonului *ABCDE* este număr rațional.



Fie O centrul pentagonului. Avem $S = 5 \cdot S_{ODC}$, unde *S* este aria pentagonului.

Avem că $OI = IC \cdot \text{ctg}\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{l}{2} \cdot \text{ctg}\dfrac{\pi}{5}$, unde $I = pr_{DC}O$, $l = DC$, $S_{ODC} = \dfrac{l^2}{4} \cdot \text{ctg}\dfrac{\pi}{5}$.

Mai departe calculăm $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

Avem că $\sin\frac{2\cdot\pi}{5}=\sin\frac{3\cdot\pi}{5}\Leftrightarrow 2\cdot\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}\cdot\left(3-4\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\right)\Leftrightarrow 2\cdot\cos\frac{\pi}{5}=3-4\cdot\sin^2\frac{\pi}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot\cos\frac{\pi}{5}=4\cdot\cos^2\frac{\pi}{5}-1\Leftrightarrow 4\cdot\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cdot\cos\frac{\pi}{5}-1=0\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Deducem că:

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{5}=\frac{\cos^2\frac{\pi}{5}}{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}{1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(5+\sqrt{5}\right)}{20}=\frac{20+8\cdot\sqrt{5}}{20}=\frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$$, de unde

rezultă $\cos\frac{\pi}{5}\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Deci, $S=\frac{5\cdot l^2}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, ceea ce reprezintă o contradicție. Prin iurmare, presupunerea făcută este falsă, deci nu există niciun pentagon regulat care să aibă toate vârfurile cu ambele coordonate numere întregi.

Problema 3

Soluţie. Din c) deducem că $3\cdot f(n)$ divide $\left(3\cdot f(n)+1\right)\cdot f(2\cdot n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, dar $3\cdot f(n)$ este relativ prim cu $3\cdot f(n)+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, de unde rezultă că $3\cdot f(n)$ divide $f(2\cdot n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, avem că $f(2\cdot n)=k\cdot 3\cdot f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi *k* număr natural nenul ce depinde de *n*.

Cum $f(2\cdot n)<6\cdot f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că

$$f(2\cdot n)=3\cdot f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^* \text{ şi } f(2\cdot n+1)=3\cdot f(n)+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Scriind numărul *n* în baza 2 obținem $n=2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n}$ cu $0\le a_1<a_2<...<a_n$, de unde rezultă că $2\cdot n=2^{a_1+1}+2^{a_2+1}+...+2^{a_n+1}$.

Avem că: $f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=4\Leftrightarrow f\left(2^0+2^1\right)=3^0+3^1,\ f(4)=3\cdot f(2)=9\Leftrightarrow f\left(2^2\right)=3^2$.

Mai departe, vom demonstra prin inducție, că pentru orice număr natural *m* și pentru orice număr natural *t*, $2^m\le t<2^{m+1},\ t=2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n},\ 0\le a_1<a_2<...<a_n$ avem că $f(t)=3^{a_1}+3^{a_2}+...+3^{a_n}$.

Evident, din relațiile de mai sus avem că afirmația este adevărată pentru $m=1$.

Presupunem afirmația adevărată pentru *m* și demonstrăm că afirmația este adevărată și pentru $m+1$.

Fie numărul natural *t*, $2^{m+1}\le t<2^{m+2}$.

Cazul I. Numărul *t* este par, $t=2\cdot p\Rightarrow 2^m\le p<2^{m+1}$ și deducem că afirmația este adevărată folosind $f(2\cdot n)=3\cdot f(n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ și $2\cdot n=2^{a_1+1}+2^{a_2+1}+...+2^{a_n+1}$.

Cazul al II-lea. Numărul *t* este impar, $t=2\cdot p+1\Rightarrow 2^{m+1}\le 2\cdot p+1<2^{m+2}\Rightarrow 2^m\le p+\frac{1}{2}<2^{m+1}\Rightarrow$ $\Rightarrow 2^m\le p<2^{m+1}$. Folosind $f(2\cdot n+1)=3\cdot f(n)+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ și ipoteza inductivă deducem afirmația este adevărată.

Inducția matematică este parcursă complet, deci pentru orice număr natural *m* și pentru orice număr natural *t*, $2^m\le t<2^{m+1},\ t=2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n},\ 0\le a_1<a_2<...<a_n$ avem că $f(t)=3^{a_1}+3^{a_2}+...+3^{a_n}$, adică $f\left(2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n}\right)=3^{a_1}+3^{a_2}+...+3^{a_n}$, pentru orice *n* numar natural nenul și pentru orice șir crescător $0\le a_1<a_2<...<a_n$. Ultima formulă $f\left(2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n}\right)=3^{a_1}+3^{a_2}+...+3^{a_n}$ satisface condițiile ce trebuie să le îndeplinească funcția *f*.

Prin urmare, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, $n=2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_k}$ (numărul *n* scris în baza 2), atunci $f(n)=f\left(2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_k}\right)=3^{a_1}+3^{a_2}+...+3^{a_k}$.