**Inspectoratul Școlar al Județului Galați**

**Societatea de Științe Matematice din România**
**Filiala Galați**

**Colegiul Național ”Vasile Alecsandri”**
**str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

**Concursul Interjudețean de Matematică ”Cristian S. Calude”**
**ediția a XVIII-a**
**Galați, 4 noiembrie 2017**

**Clasa a 7–a**

***SOLUȚII***

**Problema 1.**

**a)** Se consideră numerele **a,b** și **c**, $a,b,c\in\mathbb{Q}, a>0, b>0, c>0$, direct proporționale cu numerele $\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+a}{2}$.

Comparați numerele $n=\frac{a^{2017}+b^{2017}+c^{2017}}{3}$ și $m=a^{672}\cdot b^{672}\cdot c^{672}$.

**b)** Fie **n** un număr natural impar cu cel puțin patru cifre, astfel încât prin împărțirea numărului **n** la numerele 2,4,6,8,…,2016 se obțin resturi diferite două câte două.
Aflați ultimele patru cifre ale numărului **n.**

**Soluție.**
**a)**

$$\frac{a}{\frac{a+b}{2}}=\frac{b}{\frac{b+c}{2}}=\frac{c}{\frac{c+a}{2}}\rightarrow\frac{2a}{a+b}=\frac{2b}{b+c}=\frac{2c}{c+a}=\frac{2a+2b+2c}{2a+2b+2c}=1\rightarrow$$

$$\begin{cases}2a=a+b\\2b=b+c\\2c=a+c\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=b\\b=c\\c=a\end{cases}\rightarrow a=b=c.$$

$$n=\frac{3a^{2017}}{3}=a^{2017}.$$

$$m=a^{3\cdot672}=a^{2016}.$$

**Cazul I)** $0<a<1\rightarrow a^{2017}<a^{2016}\rightarrow n<m.$
**Cazul II)** $a=1\rightarrow n=m.$
**Cazul III)** $a>1\rightarrow a^{2017}>a^{2016}\rightarrow n>m.$

**b)**
**Teorema împărțirii cu rest** $\rightarrow n=\hat{I}\cdot C+R, R\in\{0,1,2,...,\hat{I}-1\}$

$$\left.\begin{matrix}n=impar\\\hat{I}=par\end{matrix}\right\}\rightarrow R=impar\rightarrow R\in\{1,3,5,7,...,\hat{I}-1\}\rightarrow R\in\{1,3,5,7,...,2013,2015\}$$

Cum resturile obținute la împărțirea cu 2,4,6,…,2016 sunt diferite $\rightarrow$

$$\begin{cases} n = 2\cdot C_1 + R_1 \to R_1 = 1; \\ n = 4\cdot C_2 + R_2 \to R_2 \in \{1,3\}, R_2 \neq 1 \to R_2 = 3; \\ n = 6\cdot C_3 + R_3 \to R_3 \in \{1,3,5\}, R_3 \neq 1, R_3 \neq 3 \to R_3 = 5; \\ \dots\dots\dots\dots \\ n = 2016\cdot C_{1008} + R_{1008} \to R_{1008} \in \{1,3,5,...,2015\}, R_{1008} \notin \{1,3,5,...,2013\} \to R_{1008} = 2015. \end{cases}$$

Se observă că restul la împărțirea cu 2 este 1, restul la împărțirea cu 4 este 3, … , restul la împărțirea ci 2016 este 2015.

Prin urmare, $n = \hat{I}\cdot C + (\hat{I}-1) \to n+1 = \hat{I}\cdot C + \hat{I} \to$

$(n+1) \vdots \hat{I}, unde\ \hat{I} \in \{2,4,6,...,2016\} \to (n+1) \vdots 16$ și $(n+1) \vdots 1250$ .

$1250 = 625\cdot 2 \to n+1 = 2^4\cdot 5^4\cdot 2\cdot k \to n+1 = 10^4\cdot 2\cdot k \to$

$n+1 = \overline{....0000} \to$ ultimele 4 cifre ale lui **n** sunt $\overline{9999}$.

**Problema 2.**

Un triunghi isoscel $ABC$ are $AB=AC=2\cdot BC$. Se duce înălţimea $AP, P\in(BC)$, mediana $BM,\ M\in(AC)$ şi bisectoarea $CL,\ L\in(AB)$. Pe latura $AC$ se ia un punct $D$ astfel încât $BD=BC$. Notăm cu $N$ intersecţia dintre $BD$ şi $CL$. Să se demonstreze că:

a) $BM$ este bisectoare în triunghiul $ABD;$

b) $BD$ este mediană în triunghiul $BCM;$

c) Patrulaterul $BLMN$ este romb.

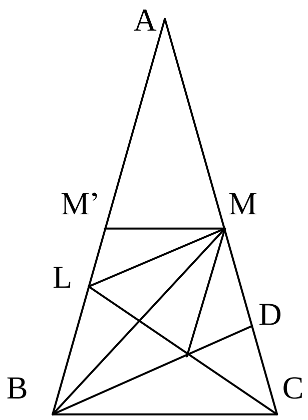
**Soluție.** **a)** Triunghiurile $ABC$ şi $BDC$ sunt asemenea(fiind isoscele şi având unghiul din $C$ comun), rezultă că $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle BAC$ . Din $BC=CM \Rightarrow \Delta CBM$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle CBM \equiv \sphericalangle CMB$. Dar, unghiul $\sphericalangle CMB$ este unghi exterior triunghiului $AMB \Rightarrow m(\sphericalangle BMC) = m(\sphericalangle BAM) + m(\sphericalangle MBA)$(1), însă, $m(\sphericalangle CBM) = m(\sphericalangle CBD) + m(\sphericalangle DBM)$(2).

Din (1) şi (2) vom avea că $m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle MBD) \Rightarrow BM$ bisectoare în triunghiul $ABD$.

**b)** Ducem prin $M$ paralela $MM'$ la $BC$, $M' \in AB \Rightarrow MM'$ linie mijlocie în triunghiul $ABC$ $\Rightarrow MM' = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{MC}{2}$. Triunghiurile $AM'M$ şi $BDC$ sunt congruente(L.U.L.) $\Rightarrow MM' = DC$, deci, $DC = \dfrac{MC}{2} \Rightarrow DC = MC \Rightarrow BD$ este mediană în triunghiul $BMC$.

**c)** Fie $\{O\} = CL \cap BM$. Triunghiul $CBM$ este isoscel( $CB=CM$ ), $CO$ bisectoare $\Rightarrow CO$ este înălţime. $CL$ mediatoarea segmentului $[BM] \Rightarrow LB = LM\ (1), NB=NM\ (2)$ În triunghiul $BLN$, $BO$ este bisectoare şi înălţime, înseamnă că triunghiul este isoscel cu $BL=BN\ (3)$.

Din $(1),(2),(3) \Rightarrow BNML$ este romb.



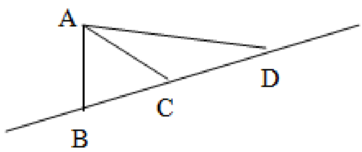
**Problema 3.**
Se consideră mulțimea ***P*** formată din 2017 puncte din plan, nu toate colineare.

**a)** Aflați numărul minim de drepte distincte care pot fi determinate de punctele mulțimii ***P.*** Justificați.

**b) )** Aflați numărul maxim de drepte distincte care pot fi determinate de punctele mulțimii ***P.*** Justificați.

**c)** Demonstrați că mulțimea ***P*** conține cel puțin două puncte **B** și **C** astfel încât dreapta **BC** nu are și alte puncte comune cu mulțimea ***P*** în afara punctelor **B** și **C** $(CB \cap P = \varnothing)$

**Soluție.**
**a)**
Dacă mulțimea ***P*** conține 2016 puncte distincte colineare , care determină dreapta *d* și un punct **A** exterior dreptei *d*, cele 2017 puncte determină 2016+1=2017 drepte distincte.




**b)**
Dacă mulțimea ***P*** conține 2017 puncte distincte, oricare trei necolineare, atunci aceste puncte determină $2016+2015+...+2+1=\dfrac{2016\cdot 2017}{2}=2033136$ drepte distincte.

**c)**
Demonstrație prin reducere la absurd.
Considerăm mulțimea tuturor tripletelor de puncte necolineare din ***P*** ,
***M***$=\{(A,B,C)\ |A,B,C \in$ mulțimii ***P*** $, A,B,C$ *necolineare*$\}$**.**
Alegem din această mulțime tripletul (A,B,C) pentru care distanța de la A la dreapta BC este minimă.

Considerăm un punct D al mulțimii ***P***, colinear cu punctele B și C.
$D \in BC,$ astfel încât C este între B și D.
Din ipoteză $\rightarrow d(A,BC) < d(C,AB)$ și $d(A,BC) < d(D,AB)$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{i}n\ \Delta ABC: BC \geq AB \\ \hat{i}n\ \Delta ACD: CD \geq AD \end{array}\right\} \rightarrow BD = BC + CD \geq AB + AD.$$

$\hat{i}n\ \Delta ABD: BD \leq AB + AD.$
Prin urmare, BD=AB+AD, deci A,B,D sunt colineare $\rightarrow$ A,B,C cunt colineare ( contrazice ipoteza).
Prin urmare, pentru punctele B și C alese astfel încât distanța de la A la dreapta BC este minimă, dreapta BC nu are și alte puncte comune cu mulțimea ***P.*** $BC \cap P = \varnothing$.