Inspectoratul Școlar al Județului Galați

Societatea de Științe Matematice din România
Filiala Galați

Colegiul Național ”Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați

Concursul Interjudețean de Matematică ”Cristian S. Calude”
ediția a XVIII-a
Galați, 4 noiembrie 2017

Clasa a X–a

SOLUȚII

Problema1

a)Fie $M \in \mathcal{P}$ și considerăm $P \in \mathcal{P}$ definit prin $7\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 10\overrightarrow{MP}$ care revine la $7(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP}) = 3(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MB})$ sau $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BP}$ .Ultima relație arată că $P \in (AB)$ și P este punct fix. Construcția punctului $M' \in \mathcal{P}$ este definită de egalitatea $\overrightarrow{MM'} = 10\overrightarrow{MP} - 8\overrightarrow{MC} = 2(5\overrightarrow{MP} - 4\overrightarrow{MC})$. În sfârșit , considerăm punctul $Q \in \mathcal{P}$ prin $5\overrightarrow{MP} - 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MQ}$ sau $5(\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MQ}) = 4(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MQ}) \leftrightarrow 5\overrightarrow{QP} = 4\overrightarrow{QC}$. Rezultă că punctele Q,P,C sunt coliniare și Q este punct fix, $P \in (QC)$, $\frac{PQ}{QC} = \frac{4}{5}$ și $\overrightarrow{MM'} = 2 \cdot \overrightarrow{MQ}$ .Ultima egalitate arată că M, M' sunt coliniare cu punctul fix Q

Din $\overrightarrow{MM'} = 2 \cdot \overrightarrow{MQ}$ obținem $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QM'} = 2\overrightarrow{MQ}$ sau $\overrightarrow{QM} = -\overrightarrow{QM'}$.În concluzie, $\alpha = -1$ și punctul M’ este simetricul punctului M față de Q pentru orice alegere a punctului M în plan. Deci A’ , B’ , C’ sunt simetricele punctelor A,B respectiv C față de punctul fix Q.(fig.1)

b) Observăm că pentru $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$ rezultă $log_a b > 0$, $log_b c > 0$, $log_c a > 0$ și $(log_a b)(log_b c)(log_c a) = 1$.

Notăm

S=$\sum \frac{1}{(log_b c + log_c a) \cdot log_a^3 b} = \sum \frac{log_b^3 a}{\frac{1}{log_c b} + \frac{1}{log_a c}} = \sum \frac{(log_b^3 a)(log_c b)(log_a c)}{log_a c + log_c b} =$

$\sum \frac{log_b^2 a}{log_a c + log_c b}$ .Folosind inegalitatea lui Bergstrom obținem:

$$\sum \frac{log_b^2 a}{log_a c + log_c b} \geq \frac{(log_b a + log_a c + log_c b)^2}{2(log_b a + log_a c + log_c b)} = \frac{log_b a + log_a c + log_c b}{2}$$

Din inegalitatea mediilor obținem

S$\geq \frac{log_b a + log_a c + log_c b}{2} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(log_b a)(log_a c)(log_c b)} = \frac{3}{2}$

Problema 2. Prelucrăm egalitatea și obținem

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + \frac{1}{3}(3x^2y + 3xy^2 + x^3 + y^3) - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3}$$

sau $f(x+y) - \frac{(x+y)^3}{3} = f(x) - \frac{x^3}{3} + f(y) - \frac{y^3}{3}$

Notăm $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}$ și ecuația funcțională devine:
$g(x+y) = g(x) + g(y)\ , x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}$ (1)
Observăm că pentru y=0 obținem $g(x) = g(x) + g(0)$,de unde $g(0) = 0$
Dacă $y = -x$ atunci $g(0) = g(x) + g(-x)$ sau $g(-x) = -g(x)$. Conform ultimei relații, este suficient să determinăm forma funcției pentru $x > 0$.
În relația (1) punem $y = x$ și avem $g(2x) = 2g(x)$ și inductiv $g(nx) = ng(x)\ , \forall x \in \mathbb{Q}$.
Pentru $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \Rightarrow g\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = n \cdot g\left(\frac{m}{n}\right)$ sau $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{g(m)}{n}$.
Dar $g(m) = g(m \cdot 1) = m \cdot g(1)$.În concluzie $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} g(1), \forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$
Pentru $x < 0 \to g(x) = -g(-x) = -\big(-x \cdot g(1)\big) = x \cdot g(1)$. Notăm $g(1) = c \in \mathbb{R}$ și forma funcției $g(x) = x \cdot c\ , \forall x \in \mathbb{Q}$. Funcțiile f sunt $f(x) = \frac{x^3}{3} + c \cdot x$.
Arătăm că pentru orice $c \in \mathbb{R}$ funcțiile verifică relația funcțională:

$$\frac{(x+y)^3}{3} + c(x+y) = \frac{x^3}{3} + cx + \frac{y^3}{3} + cy + (x^2y + xy^2)$$

Problema 3.

Notăm $log_{11}(7^x + 4) = a$ și $log_7(11^y - 4) = b$ și obținem $\begin{cases} 7^x + 4 = 11^a \\ 11^y - 4 = 7^b \\ a < b \end{cases}$
Prin adunarea primelor două relații rezultă că $7^x + 11^y = 11^a + 7^b$, unde $a < b$ (1)
Analog, notăm $log_{23}(13^y + 10) = c$ și $log_{13}(23^x - 10) = d$ sau $\begin{cases} 13^y + 10 = 23^c \\ 23^x - 10 = 13^d \\ c > d \end{cases}$
Prin adunare avem egalitatea $13^y + 23^x = 13^d + 23^c$, unde $c > d$ (2)
Presupunem prin reducere la absurd că $x \geq y$
Din relația (1) rezultă $7^x + 11^x \geq 7^x + 11^y = 11^a + 7^b > 11^a + 7^a$ de unde $x > a$ și folosind $7^x + 4 = 11^a$ avem $7^x + 4 < 11^x \leftrightarrow \left(\frac{7}{11}\right)^x + 4\left(\frac{1}{11}\right)^x < 1$. Pentru că funcția
$f(x) = \left(\frac{7}{11}\right)^x + 4\left(\frac{1}{11}\right)^x$ este strict descrescătoare și $f(1) = 1$ obținem $x > 1$
Din relația (2) și $x \geq y$ rezultă $13^x + 23^x \geq 13^y + 23^x = 13^d + 23^c > 13^d + 23^d$,deci $x > d$
Pentru ca $x > d$ și$23^x - 10 = 13^d$ rezultă $23^x - 10 < 13^x \leftrightarrow 1 < \left(\frac{13}{23}\right)^x + 10 \cdot \left(\frac{1}{23}\right)^x$.
Cum funcția $g(x) = \left(\frac{13}{23}\right)^x + 10 \cdot \left(\frac{1}{23}\right)^x$este strict descrescătoare și $g(1) = 1$ obținem $1 > x$, contradicție. Presupunerea este falsă, rămâne că $x < y$.

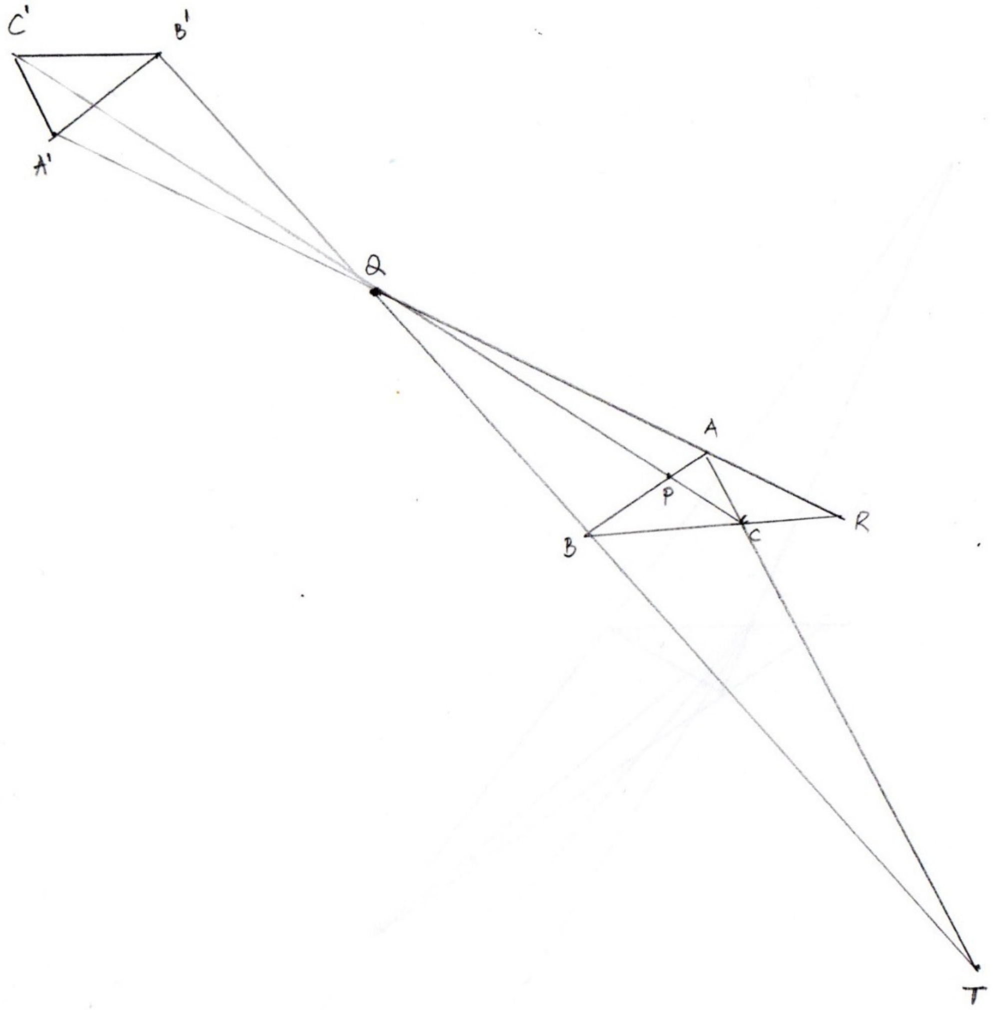

Fig.1