

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude”, ediția a XII-a
Galați, 05 noiembrie 2011

Clasa a IX-a

SOLUȚII

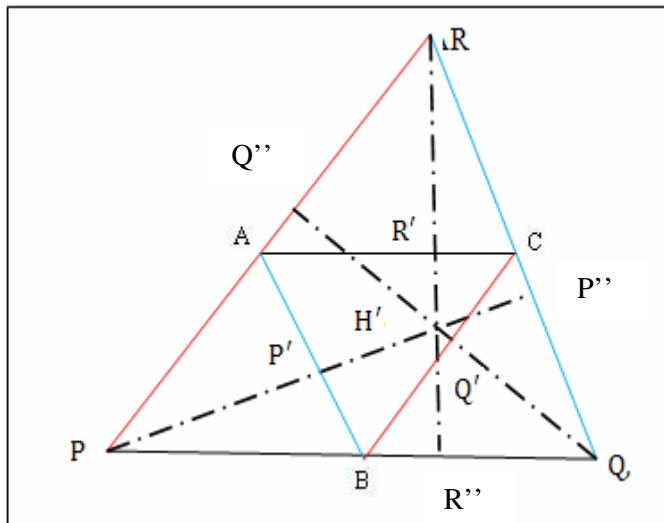
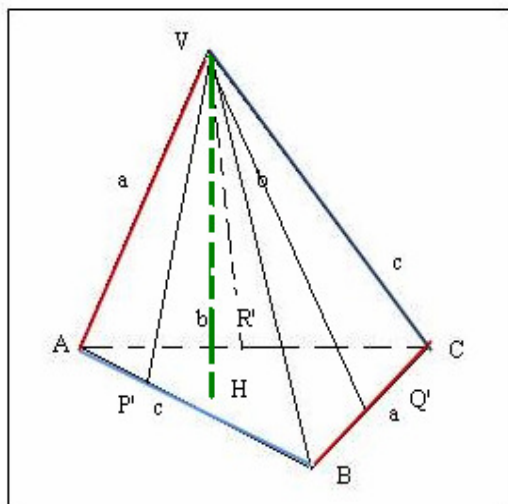
Problema 1.

Soluție.

a) Toate fețele piramidei sunt triunghiuri congruente: $\triangle VAB \equiv \triangle BCV \equiv \triangle CBA \equiv \triangle AVC$ (1) (Nicio altă alegere a triunghiurilor congruente nu ar respecta condițiile problemei : toate cele 4 fețe ale piramidei să fie triunghiuri respectiv congruente).

Prin urmare, $\sphericalangle AVC \equiv \sphericalangle ABC$; $\sphericalangle AVB \equiv \sphericalangle ACB$; $\sphericalangle BVC \equiv \sphericalangle BAC$ →

$$m(\sphericalangle AVC) + m(\sphericalangle AVB) + m(\sphericalangle BVC) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BAC) = 180^\circ$$



b) Dacă desfășurăm fețele laterale conform enunțului, se obține triunghiul PQR .

Din relația (1) → $[AP] \equiv [AR] \equiv [BC]$, $[BQ] \equiv [BP] \equiv [AC]$ și $[CQ] \equiv [CR] \equiv [AB]$ →

$[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ sunt liniile mijlocii ale $\triangle PQR$ ($\triangle ABC$ este triunghiul median al $\triangle PQR$)

Prin urmare, $AB \parallel RQ$, $BC \parallel PR$, $AC \parallel PQ$. Fie PP'' , QQ'' , RR'' înălțimile $\triangle PQR$, unde $P'' \in [RQ]$, $Q'' \in [PR]$, $R'' \in [PQ]$

$$AB \parallel RQ, BC \parallel PR, AC \parallel PQ$$

$$[PP''] \perp RQ, [QQ''] \perp PR, [RR''] \perp PQ, [PP''] \cap [QQ''] \cap [RR''] = \{H'\} \rightarrow PP'' \perp AB, QQ'' \perp BC, RR'' \perp AC$$

Prin urmare,

$$\left. \begin{aligned} VP' \perp AB, H'P' \perp AB &\rightarrow AB \perp (VP'H') \rightarrow AB \perp VH' \\ VQ' \perp BC, H'Q' \perp BC &\rightarrow BC \perp (VQ'H') \rightarrow BC \perp VH' \end{aligned} \right\} \rightarrow VH' \perp (ABC)$$

$$\rightarrow [VH'] \text{ este înălțime în piramida } VABC \rightarrow H' = H$$

Problema 2

Soluție.

Avem:

$$3n = \sqrt{9n^2} < \sqrt{9n^2 + 1} < \sqrt{9n^2 + 2} < \dots < \sqrt{9n^2 + 6n} < \sqrt{9n^2 + 6n + 1} = \sqrt{(3n + 1)^2} = 3n + 1,$$

de unde $[\sqrt{9n^2 + 1}] = [\sqrt{9n^2 + 2}] = \dots = [\sqrt{9n^2 + 6n}] = 3n$, deci $[\sqrt{9n^2 + k}] = 3n$, $k = \overline{1, 6n}$;

$$3n + 1 = \sqrt{(3n + 1)^2} = \sqrt{9n^2 + 6n + 1} < \sqrt{9n^2 + 6n + 2} < \sqrt{9n^2 + 6n + 3} < \dots < \sqrt{9n^2 + 12n + 3} < \sqrt{9n^2 + 12n + 4} = \sqrt{(3n + 2)^2} = 3n + 2,$$

de unde $[\sqrt{9n^2 + k}] = 3n + 1$, $k = \overline{6n + 1, 12n + 3}$;

$$3n + 2 = \sqrt{(3n + 2)^2} = \sqrt{9n^2 + 12n + 4} < \sqrt{9n^2 + 12n + 5} < \sqrt{9n^2 + 12n + 6} < \dots < \sqrt{9n^2 + 18n + 8} < \sqrt{9n^2 + 18n + 9} = \sqrt{(3n + 3)^2} = 3n + 3,$$

de unde $[\sqrt{9n^2 + k}] = 3n + 2$, $k = \overline{12n + 4, 18n + 8}$;

$$3n + 3 = \sqrt{(3n + 3)^2} = \sqrt{9n^2 + 18n + 9} < \sqrt{9n^2 + 18n + 10} < \sqrt{9n^2 + 18n + 11} < \dots < \sqrt{9n^2 + 24n + 15} < \sqrt{9n^2 + 24n + 16} = \sqrt{(3n + 4)^2} = 3n + 4,$$

de unde $[\sqrt{9n^2 + k}] = 3n + 3$, $k = \overline{18n + 9, 24n + 15}$.

Inecuația din enunț se scrie astfel:

$$\begin{aligned} & ([\sqrt{9n^2 + 1}] + [\sqrt{9n^2 + 2}] + \dots + [\sqrt{9n^2 + 6n}]) + ([\sqrt{9n^2 + 6n + 1}] + [\sqrt{9n^2 + 6n + 2}] + \\ & + [\sqrt{9n^2 + 6n + 3}] + \dots + [\sqrt{9n^2 + 12n + 3}]) + ([\sqrt{9n^2 + 12n + 4}] + [\sqrt{9n^2 + 12n + 5}] + \dots + [\sqrt{9n^2 + 12n + 6}] + \dots + \\ & + [\sqrt{9n^2 + 18n + 8}]) + ([\sqrt{9n^2 + 18n + 9}] + [\sqrt{9n^2 + 18n + 10}] + \dots + [\sqrt{9n^2 + 18n + 11}] + \dots + \\ & + [\sqrt{9n^2 + 24n + 15}]) \leq 144n + 43 \Leftrightarrow \underbrace{3n + 3n + \dots + 3n}_{\text{de } 6n \text{ ori}} + \underbrace{(3n + 1) + (3n + 1) + \dots + (3n + 1)}_{\text{de } 6n + 3 \text{ ori}} + \\ & + \underbrace{(3n + 2) + (3n + 2) + \dots + (3n + 2)}_{\text{de } 6n + 5 \text{ ori}} + \underbrace{(3n + 3) + (3n + 3) + \dots + (3n + 3)}_{\text{de } 6n + 7 \text{ ori}} \leq 144n + 43 \Leftrightarrow \\ & 3n \cdot 6n + (3n + 1)(6n + 3) + (3n + 2)(6n + 5) + (3n + 3)(6n + 7) \leq 144n + 43 \Leftrightarrow \\ & 72n^2 + 81n + 34 \leq 144n + 43 \Leftrightarrow 72n^2 - 63n - 9 \leq 0 \Leftrightarrow 8n^2 - 7n - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 8n(n - 1) + n - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (n - 1)(8n + 1) \leq 0. \end{aligned}$$

Cum $n \in \mathbb{N}'$, rezultă $8n + 1 \geq 0$ și atunci inecuația obținută este echivalentă cu $n - 1 \leq 0$, adică $n \leq 1$, deci $n = 1$.

Problema 3

Soluție.

Se demonstrează pozițiile:

Propoziția 1:

$$a, b, c \in \mathbb{Z}; a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

\Leftarrow Dacă $a = b = c = 0$, propoziția este evidentă.

$$\Rightarrow \text{Dacă } a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \Rightarrow b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a \Rightarrow 2b^2 + 3c^2 + 2bc\sqrt{6} = a^2 \Leftrightarrow 2b^2 + 3c^2 - a^2 = -2bc\sqrt{6}.$$

Deoarece $\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow b = 0$ sau $c = 0$.

$$\text{Dacă } b = 0 \Rightarrow a + c\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = -c\sqrt{3} \Rightarrow a = c = 0.$$

$$\text{Dacă } c = 0 \Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = -b\sqrt{2} \Rightarrow a = b = 0, \text{ deci propoziția este demonstrată.}$$

Propoziția 2:

Fie $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Z}$.

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} \Leftrightarrow a = a', b = b', c = c'.$$

Demonstrație:

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} \Leftrightarrow a - a' + (b - b')\sqrt{2} + (c - c')\sqrt{3} = 0. \text{ Conform propoziției } 1 \Rightarrow a = a', b = b', c = c'.$$

a) Considerăm o mulțime S de 10^{18} numere de forma $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ cu $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 10^6 - 1\}$. Conform Propoziției 1 și Propoziției 2, S conține 10^{18} elemente distincte două câte două. Considerăm $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 10^6$. Se justifică: $(\forall)x \in S \Rightarrow x \in [0, d)$.

Partiționăm intervalul $[0, d)$ în $10^{18} - 1$ intervale de forma $[(k-1)l, k \cdot l)$, unde $l = \frac{d}{10^{18} - 1}$ și $k \in \{1, 2, 3, \dots, 10^{18} - 1\}$.

Vor exista două numere în același interval și diferența lor $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$ satisface

$$|r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}| < l = \frac{d}{10^{18} - 1} = \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot 10^6}{10^{18} - 1} < \frac{1}{10^{21}}$$

b) Considerăm $F_1 = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, $F_2 = a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3}$, $F_3 = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, $F_4 = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3}$.
 $F_1 \neq 0$.

Dacă $F_1 = 0 \Leftrightarrow a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$, care nu satisface condițiile din ipoteză.

$F_1 \neq 0 \Rightarrow F_2 \neq 0, F_3 \neq 0, F_4 \neq 0$.

Considerăm $p = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4$.

$$p \in \mathbb{Z} \text{ și } p \neq 0 \rightarrow |p| \geq 1 \rightarrow |F_1| = \frac{p}{F_2 \cdot F_3 \cdot F_4} \geq \frac{1}{F_2 \cdot F_3 \cdot F_4}.$$

Deoarece $|F_i| < 10^7 \rightarrow |F_2 \cdot F_3 \cdot F_4| < 10^{21}$

În concluzie, $|F_1| > 10^{-21}$