

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude”, ediția a XII-a
Galați, 05 noiembrie 2011

Clasa a VIII-a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. a) Din $\frac{a+c}{b} = \sqrt{3}$ obținem $b = \frac{a+c}{\sqrt{3}}$ și înlocuind în relația $\frac{b+c}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ obținem relația

$$\frac{\frac{a+c}{\sqrt{3}}+c}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow \frac{a+c+c\cdot\sqrt{3}}{a\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Leftrightarrow 2\cdot(a+c+c\cdot\sqrt{3}) = (\sqrt{3}+1)\cdot a\cdot\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 2\cdot c.$$

Din relațiile $a = 2\cdot c$ și $\frac{a+c}{b} = \sqrt{3}$, obținem $b = c\cdot\sqrt{3}$. Apoi, din relațiile $a = 2\cdot c$ și $b = c\cdot\sqrt{3}$ obținem că

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2\cdot c+c\cdot\sqrt{3}}{c} = 2+\sqrt{3}.$$

b) Din $a = 2\cdot c$ și $b = c\cdot\sqrt{3}$ deducem că a, b și c verifică relația din teorema lui Pitagora, deoarece $(2\cdot c)^2 = (c\cdot\sqrt{3})^2 + c^2 \Leftrightarrow 4\cdot c^2 = 3\cdot c^2 + c^2$. Așadar, a, b și c pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic, cu ipotenuza de lungime a .

Altfel, avem că $c < b = c\cdot\sqrt{3} < a = 2\cdot c$ și $c+b = c+c\cdot\sqrt{3} = c\cdot(1+\sqrt{3}) > 2\cdot c = a$, deci $b+c > a$.

Folosind inegalitatea $a > b > c$ se deduce ușor că $a+c > b$ și $a+b > c$. Prin urmare, a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

b) În triunghiul $\triangle ABC$ avem că $BC = a = 2\cdot c$, $AC = b = c\cdot\sqrt{3}$ și $AB = c$, deci $BC^2 = AB^2 + AC^2$, adică triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic în A și $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} = \frac{c}{2\cdot c} = \frac{1}{2}$, adică $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$.

Problema 2.

Soluție.

a) **Soluție.** Înmulțind ecuația cu 4, avem $4\cdot x^2 - 4\cdot x + 4\cdot y^2 - 4\cdot y - 8 = 0 \Leftrightarrow (2\cdot x - 1)^2 + (2\cdot y - 1)^2 = 10$.

Deoarece $2\cdot x - 1, 2\cdot y - 1 \in 2\cdot\mathbb{Z} + 1$, avem următoarele situații $\begin{cases} 2\cdot x - 1 = 1 \\ 2\cdot y - 1 = 3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2\cdot x - 1 = -1 \\ 2\cdot y - 1 = -3 \end{cases}$ sau

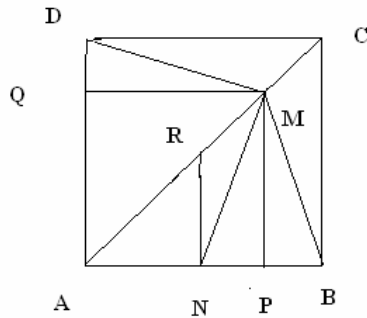
$$\begin{cases} 2\cdot x - 1 = 3 \\ 2\cdot y - 1 = 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2\cdot x - 1 = -3 \\ 2\cdot y - 1 = -1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2\cdot x - 1 = -3 \\ 2\cdot y - 1 = +1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2\cdot x - 1 = +3 \\ 2\cdot y - 1 = -1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2\cdot x - 1 = -1 \\ 2\cdot y - 1 = +3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2\cdot x - 1 = +1 \\ 2\cdot y - 1 = -3 \end{cases}.$$

În final, $(x; y) \in \{(1; 2), (0; -1), (2; 1), (-1; 0), (-1; 1), (2; 0), (0; 2), (1; -1)\}$.

b) Avem că $x = n^2 - 2 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot n + 2 \cdot \sqrt{3} = [n - (\sqrt{7} - \sqrt{3})]^2 + 2 \cdot \sqrt{21} - 10 + 2 \cdot \sqrt{3}$, de unde obținem că x este minim dacă valoarea absolută a numărului real $n - (\sqrt{7} - \sqrt{3})$, $n \in \mathbb{Z}$ este minimă, adică pentru $n = 1$. Deci, cel mai mic element al mulțimii A este $1 + 4 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{7}$.

Problema 3

a) Ducem $MP \perp AB$, $P \in [AB]$ și $MQ \perp AD$, $Q \in [AD]$. Avem că $APMQ$ este pătrat, iar din $[MQ] \equiv [MP]$ și $\sphericalangle DMQ \equiv \sphericalangle MPN$ obținem că $\Delta MQD \equiv \Delta MPN$. Deci, $[MD] \equiv [MN]$, iar din faptul că AC este mediatoare pentru $[BD]$ și $M \in [AC]$, avem că $[MD] \equiv [MB]$. Prin urmare, $[MN] \equiv [MB]$, deci ΔMNB este isoscel și cum $MP \perp NB$, deducem că $[NP] \equiv [PB]$. Mai departe, ducem $NR \perp AB$, $R \in (AC)$. Avem că $AR = \sqrt{2} \cdot AN = 2 \cdot MC$. Deoarece $RN \perp AB$, $MP \perp AB$, $BC \perp AB$, rezultă că $RN \parallel MP \parallel BC$ și aplicând teorema lui Thales avem că $\frac{AR}{RM} = \frac{AN}{PN}$ și $\frac{RM}{MC} = \frac{NP}{PB}$, de unde deducem, prin înmulțirea celor două relații, că $\frac{AR}{MC} = \frac{AN}{PB}$. Dar, având în vedere că $AR = 2 \cdot MC$, obținem că $AN = 2 \cdot PB = NB$. Prin urmare, N este mijlocul lui $[AB]$. Avem că $\Delta AMP \equiv \Delta ACB$, de unde rezultă că $\frac{MP}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{3 \cdot PB}{4 \cdot PB} = \frac{3}{4}$. Atunci $A_{\Delta AMN} = \frac{AN \cdot MP}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{3 \cdot a}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot a^2}{16}$, deci $\frac{A_{\Delta AMN}}{A_{ABCD}} = \frac{3 \cdot a^2}{16} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{3}{16}$.



b) Să observăm mai întâi că, indiferent de paritatea lui n , primul jucător care mută poate adopta o strategie prin care să câștige jocul. Dacă n este par, atunci primul jucător va hașura două pătrate situate la mijloc. Față de aceste pătrate tabla este simetrică și orice va marca (hașura) al doilea jucător, primul jucător va marca (hașura) pătratele simetrice. Acest raționament arată că primul jucător va fi ultimul care va marca (hașura). Dacă n este impar, atunci primul jucător va marca (hașura) pătratul din mijloc, tabla va deveni simetrică față de pătratul marcat (hașurat) și raționamentul este același cu cel de la cazul n număr natural par.