

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude”, ediția a XII-a
Galați, 05 noiembrie 2011

Clasa a XI-a

SOLUȚII

Problema 1.

Fie șirurile de numere reale:

$(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}, (z_n)_{n \geq 1}$ definite astfel:

$$x_1 = 3, y_1 = 5, z_1 = \frac{4}{7}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1} \text{ pentru orice } n \text{ natural, nenul, } n \geq 1.$$

a) Justificați că șirurile de mai sus sunt corect construite.

b) Studiați convergența și limita șirului $(t_n)_{n \geq 1}$, unde $t_n = \frac{1}{n} \cdot x_n \cdot \cos(2^{n-1} \cdot \arctg 3), n \in \mathbb{N}^*$.

c) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $x_n + y_n + z_n = 0$?

Constantin Ursu, profesor, Galați

a) Observând că x_1, y_1, z_1 sunt numere raționale, prin inducție se arată că x_n, y_n, z_n sunt numere raționale (dacă există). Presupunem că există $n \in \mathbb{N}^*, n > 1$ astfel încât

$$x_n^2 = 1, \text{ deci } x_n = 1 \text{ sau } x_n = -1 \text{ atunci } x_n = \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}^2 - 1} = \pm 1, \text{ implică } x_{n-1} \text{ satisface o ecuație de forma}$$

$t^2 \pm 2t - 1 = 0$ ($x_{n-1} = t$) care are $\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2, t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, contradicție. În concluzie, $(x_n)_{n \geq 1}$ este corect construit. La fel se arată că $(y_n)_{n \geq 1}, (z_n)_{n \geq 1}$ sunt șiruri corect construite.

b) $x_1 = 3$ ne arată că există $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} \alpha = 3$, de unde

$$x_2 = \frac{2x_1}{x_1^2 - 1} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = -\operatorname{tg}(2\alpha) \text{ și } x_3 = \frac{2x_2}{x_2^2 - 1} = \frac{-\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg}^2 2\alpha - 1}. \text{ Rezultă că } x_3 = \operatorname{tg} 2^2 \cdot \alpha. \text{ Prin}$$

inducție $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \operatorname{tg}(2^{n-1} \alpha)$. Calculând t_n se obține

$$t_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \operatorname{tg}(2^{n-1} \cdot \alpha) \cdot \cos(2^{n-1} \cdot \alpha) \Leftrightarrow t_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \sin(2^{n-1} \cdot \arctg 3). \text{ Din}$$

$|t_n| \leq \frac{1}{n}$ rezultă că șirul $(t_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita 0.

c) Vom folosi cunoscuta propoziție: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (în condițiile de existență ale valorilor $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma$).

În cazul problemei, $x_1 + y_1 + z_1 = \frac{60}{7}$ și $x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = \frac{60}{7}$. Există

$\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} \alpha = 3, \operatorname{tg} \beta = 5$ și $\operatorname{tg} \gamma = \frac{4}{7}$. Deci avem

$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, de unde $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2k\pi \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 = -\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{tg} 2\gamma = (-\operatorname{tg} 2\alpha)(-\operatorname{tg} 2\beta)(-\operatorname{tg} 2\gamma) = x_2 \cdot y_2 \cdot z_2$.

Prin inducție se arată că $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_{n+1} \cdot y_{n+1} \cdot z_{n+1} \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă presupunem că

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n + y_n + z_n = 0 \Rightarrow x_n \cdot y_n \cdot z_n = 0$. Deci există

$n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n = 0$ sau $y_n = 0$ sau $z_n = 0$, care este o contradicție. În concluzie, nu

există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n + y_n + z_n = 0$.

Problema 2.

Se considera S_n mulțimea permutărilor definite pe $\{1, 2, 3, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*, n > 1$.

Se notează cu t_n numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ ce au exact două inversiuni și cu p_n numărul permutărilor $\sigma' \in S_n$ pentru care există un singur număr $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ astfel încât $\sigma'(i) > \sigma'(i+1)$.

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $p_n = 2 + t_n$.

Constantin Ursu, profesor, Galați

Dacă p_n este numărul permutărilor $\sigma' \in S_n, n > 1$ astfel încât există un singur $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ cu proprietatea că

$\sigma'(i) > \sigma'(i+1)$ atunci $p_2 = 1, \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (unica permutare). Dacă $n > 2$, numărul permutărilor

σ' cu $\sigma'(n) = n$ este egal cu p_{n-1} . Căutăm permutările

$\sigma' \in S_n$ astfel încât $\sigma'(i) = n; i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ cu i fixat și i să fie unicul cu această proprietate

atunci σ' are forma: $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ & & & & & \downarrow & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$. În mod necesar

$\sigma'(1) < \sigma'(2) < \dots < \sigma'(i-1)$. Deci trebuie să alegem $i-1$ elemente din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ și

să le așezăm pe pozițiile $1, 2, 3, \dots, i-1$, ce se poate realiza în C_{n-1}^{i-1} moduri. Pentru

$\sigma'(i+1), \sigma'(i+2), \dots, \sigma'(n)$ se scriu elementele rămase în ordine crescătoare. Deci obținem

relația de recurență: $p_n = p_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} \Leftrightarrow p_n = p_{n-1} + 2^{n-1} - 1, p_2 = 1$. Se sumează și se obține

$p_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \Rightarrow p_n = 2^n - n - 1, n \geq 2$. $\sigma \in S_n$ are exact două inversiuni dacă este una din următoarele variante:

$$\left. \begin{array}{l} a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i+1 & i+2 & i & \dots & n \end{pmatrix} \\ b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i+2 & i & i+1 & \dots & n \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{cu } i \in \{1, 2, 3, \dots, n-2\}$$

$$c) \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & i & i+1 & j & j+1 & \dots & n \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \dots & i+1 & i & j+1 & j & \dots & n \end{array} \right\} \text{ unde } i+1 < j \text{ și } i \in \{1, 2, \dots, j-2\}.$$

Numărul de variante de tipul a) este $n-2$, la fel de tipul b), dar de tipul c) numărul de variante este

$$S = \sum_{j=3}^{n-1} (j-2) \text{ deoarece } i \in \{1, 2, 3, \dots, j-2\} \text{ atunci } S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}. \text{ Deci}$$

$$t_n = \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 2(n-2) = \frac{(n-2)(n+1)}{2}. \text{ Avem de rezolvat ecuația:}$$

$$2^n - n - 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2} + 2 \Leftrightarrow 2^{n+1} = n^2 + n + 4. \text{ Se verifică } n=3 \text{ soluție și prin inducție de arată că}$$

pentru $n \geq 4 \Leftrightarrow 2^{n+1} > n^2 + n + 4$. Deci singura soluție $n=3$.

Problema 3

Fie punctul D situat în interiorul triunghiului $\triangle ABC$ astfel încât: $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ACB) + 90^\circ$ și

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC. \text{ Calculați valoarea raportului } \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}.$$

Problemă selectată de Constantin Ursu, profesor, Galați

Considerăm a, b, c, d și 0 afixele punctelor A, B, C, D, $\alpha = m(\sphericalangle CAD)$, $s = \frac{AC}{AD}$. Din relația

$$AC = s \cdot AD \text{ se obține } a - c = a \cdot s(\cos \alpha + i \sin \alpha) = a \cdot s \cdot e^{i\alpha} \quad (1). \text{ La fel se obține}$$

$$c - b = s \cdot b \cdot i(\cos \alpha + i \sin \alpha) = s \cdot b \cdot i \cdot e^{i\alpha} \quad (2). \text{ Din (1) și (2) rezultă}$$

$$a - b = a \cdot s \cdot e^{i\alpha} + s \cdot b \cdot i \cdot e^{i\alpha} = s \cdot e^{i\alpha}(a + bi). \text{ Calculând } ac = b \cdot a(1 + i \cdot s \cdot e^{i\alpha}); bc = b \cdot a(1 - s \cdot e^{i\alpha}) \text{ se deduce că:}$$

$$(a - b)c = s \cdot e^{i\alpha}(a + bi)c = s(a \cdot c \cdot e^{i\alpha} + b \cdot c \cdot i \cdot e^{i\alpha}) = s \cdot a \cdot b[e^{i\alpha}(1 + s \cdot i \cdot e^{i\alpha}) + i \cdot e^{i\alpha}(1 - s \cdot e^{i\alpha})] =$$

$$= s \cdot a \cdot b \cdot e^{i\alpha}(1 + i). \text{ Trecând la module obținem: } |a - b| \cdot |c| = AB \cdot CD = s \cdot |a| \cdot |b| \sqrt{2} = AC \cdot BD \sqrt{2}. \text{ De}$$

unde rezultă că: $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD} = \sqrt{2}$, adică valoarea raportului cerut este $\sqrt{2}$.