

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude”, ediția a XII-a
Galați, 5 noiembrie 2011

Clasa a X-a

SOLUȚII

Problema 1.

Soluție. a) Utilizând proprietățile logaritmulor și inegalitatea mediilor avem succesiv:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{(a+b)^2}} \frac{9}{4 \cdot \left(\frac{a+b}{2} + c + d\right)^2} &= \log_{(a+b)^{-2}} \left(\frac{a+b+2 \cdot c+2 \cdot d}{3}\right)^{-2} = \log_{(a+b)} \left(\frac{a+b+2 \cdot c+2 \cdot d}{3}\right) = \\ &= \log_{(a+b)} \left(\frac{(b+c)+(c+d)+(d+a)}{3}\right) \geq \log_{a+b} \sqrt[3]{(b+c) \cdot (c+d) \cdot (d+a)} \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\log_{a+b}(b+c) + \log_{a+b}(c+d) + \log_{a+b}(d+a)) \geq \sqrt[3]{\log_{a+b}(b+c) \cdot \log_{a+b}(c+d) \cdot \log_{a+b}(d+a)} \text{ și} \end{aligned}$$

încă trei inegalități analoge obținute prin permutări circulare, de unde, prin înmulțirea lor membru cu membru, rezultă

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{(a+b)^2}} \frac{9}{4 \cdot \left(\frac{a+b}{2} + c + d\right)^2} \cdot \log_{\frac{1}{(b+c)^2}} \frac{9}{4 \cdot \left(\frac{b+c}{2} + d + a\right)^2} \cdot \log_{\frac{1}{(c+d)^2}} \frac{9}{4 \cdot \left(\frac{c+d}{2} + a + b\right)^2} \cdot \log_{\frac{1}{(d+a)^2}} \frac{9}{4 \cdot \left(\frac{d+a}{2} + b + c\right)^2} \geq \\ \geq \sqrt[3]{\Pi(\log_{a+b}(b+c) \cdot \log_{b+c}(a+b))} = 1. \end{aligned}$$

b) Fie $x_n = \sum_{k=1}^n k^4 + k^2 + \sqrt{1+k}$. Deoarece $k^4 + k^2 + \sqrt{1+k} > 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $x_n > n$. Pe de altă parte,

din

$$k^4 + k^2 + \sqrt{1+k} = k^4 + k^2 + \sqrt{(1+k) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{\text{de } k^4 + k^2 \text{ ori}}} \leq \frac{(1+k) + \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\text{de } k^4 + k^2 \text{ ori}}}{k^4 + k^2 + 1} = 1 + \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$

de unde, prin sumare, rezultă $x_n < n + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2 + n + 1}\right) < n + \frac{1}{2}$, deci $x_n \in \left(n; n + \frac{1}{2}\right)$, adică $\{x_n\} < \frac{1}{2}$.

Problema 2.

Soluție a) Fie M mijlocul lui $[BC]$. Atunci:

$$\overline{AM} \cdot \overline{B'C'} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot (\overline{HC'} - \overline{HB'}) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{HC'} - \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{HB'} = \frac{1}{2}bc \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \frac{1}{2}cb \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = 0$$

deci $AM \perp B'C'$, și analog celelalte doua mediane din B , respectiv C ale triunghiului ABC sunt perpendiculare pe $C'A'$, respectiv $A'B'$.

$$\begin{aligned} \text{b) } (\overline{HA'} + \overline{HB'} + \overline{HC'})^2 &= \overline{HA'}^2 + \overline{HB'}^2 + \overline{HC'}^2 + 2\overline{HA'} \cdot \overline{HB'} + 2\overline{HB'} \cdot \overline{HC'} + 2\overline{HC'} \cdot \overline{HA'} = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos(\pi - C) + 2bc \cos(\pi - A) + 2ac \cos(\pi - B) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos C - 2bc \cos A - \\ &- 2ac \cos B = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 - a^2) - (c^2 + a^2 - b^2) = 0, \text{ de unde rezultă că} \\ \overline{HA'} + \overline{HB'} + \overline{HC'} &= \vec{0}, \text{ deci } H \text{ este centrul de greutate al triunghiului } A'B'C'. \end{aligned}$$

Problema 3

Soluție. a) Din $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$ și $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$, prin înmulțirea celei de-a doua relații cu k și adunarea lor rezultă $(1+k) \cdot \overline{MN} = (\overline{MA} + k \cdot \overline{MB}) + (\overline{AD} + k \cdot \overline{BC}) + (\overline{DN} + k \cdot \overline{CN}) = \overline{AD} + k \cdot \overline{BC}$, de unde rezultă concluzia.

b) Fie $O \in [O_1O_2]$ astfel încât $O_1O = k \cdot OO_2$. Conform punctului a) rezultă că $\overline{OP} = \frac{1}{k+1} \cdot (\overline{O_1M} + k \cdot \overline{O_2N})$ și din inegalitățile triunghiulare rezultă că $|\overline{OP}| \leq \frac{1}{k+1} \cdot (|\overline{O_1M}| + k \cdot |\overline{O_2N}|)$, respectiv $|\overline{OP}| \geq \frac{1}{k+1} \cdot \left| |\overline{O_1M}| - k \cdot |\overline{O_2N}| \right|$, adică $OP \leq \frac{R_1 + k \cdot R_2}{k+1}$ respectiv $OP \geq \frac{|R_1 - k \cdot R_2|}{k+1}$. Cum punctul O este fix, rezultă că mulțimea punctelor P va fi inclusă în discul $D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right)$ dacă

$R_1 = k \cdot R_2$, respectiv coroana circulară $D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right) \setminus \text{Int}C\left(O; \frac{|R_1 - k \cdot R_2|}{1+k}\right)$, dacă $R_1 \neq k \cdot R_2$.

Pentru demonstrarea incluziunii inverse, problema revine la determinarea punctelor $M \in C(O_1; R_1)$, respectiv $N \in C(O_2; R_2)$, cu proprietatea că $P \in [MN]$, fixat, iar $MP = k \cdot PN$, $P \in D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right)$

în cazul $R_1 = k \cdot R_2$, sau $P \in D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right) \setminus \text{Int}C\left(O; \frac{|R_1 - k \cdot R_2|}{1+k}\right)$, dacă $R_1 \neq k \cdot R_2$.

Cazul 1). Fie $R_1 = k \cdot R_2$ și $P \in D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right)$, adică $OP \leq \frac{R_1 + k \cdot R_2}{k+1}$. Presupunem determinate punctele M și N pe cele două cercuri, deci are loc relația $\overline{OP} = \frac{1}{k+1} \cdot (\overline{O_1M} + k \cdot \overline{O_2N})$. Considerăm punctele M' și N' astfel încât $\overline{O_1M} = \overline{OM}'$ și $\overline{O_2N} = \overline{ON}'$. Atunci $\overline{OP} = \frac{1}{k+1} \cdot (\overline{OM}' + k \cdot \overline{ON}')$. Fie

$L \in [ON']$ astfel încât $OL = k \cdot LN'$. Rezultă $PL = \frac{1}{k+1} \cdot OM'$ și $OL = k \cdot LN'$. Triunghiul OLP (eventual degenerat) poate fi construit, deoarece are laturile de lungimi OP , $PL = \frac{R_1}{k+1}$, $OL = \frac{k \cdot R_2}{k+1}$.

Punctele M' , respectiv N' se determină în mod unic din condițiile $\overline{OM}' = (k+1) \cdot \overline{LP}$, $\overline{ON}' = \frac{k+1}{k} \cdot \overline{OL}$,

iar punctele M , respectiv N se determină în mod unic din condițiile $\overline{OM}' = \overline{O_1M}$, $\overline{ON}' = \overline{O_2N}$ și

$O_1M = OM' = (k+1) \cdot LP = R_1$, respectiv $O_2N = ON' = \frac{k+1}{k} \cdot OL = R_2$, deci $M \in C(O_1; R_1)$,

$N \in C(O_2; R_2)$.

Cazul 2). $R_1 \neq k \cdot R_2$. Fie $P \in D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right) \setminus \text{Int}C\left(O; \frac{|R_1 - k \cdot R_2|}{1+k}\right)$, adică

$\frac{|R_1 - k \cdot R_2|}{k+1} \leq OP \leq \frac{R_1 + k \cdot R_2}{k+1}$. Ca și în cazul precedent, se poate construi triunghiul OLP cu laturile de

lungimi OP , $PL = \frac{R_1}{k+1}$, $OL = \frac{k \cdot R_2}{k+1}$, de unde exact ca mai sus, se obțin punctele M' , N' , iar în final,

punctele $M \in C(O_1; R_1)$, $N \in C(O_2; R_2)$.