

Concursul Interjudețean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediția a XII-a
Galați, 5 noiembrie 2011

Clasa a X-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

a) Obținerea relației

$$\log_{\frac{1}{(a+b)^2}} \frac{9}{4 \cdot \left(\frac{a+b}{2} + c + d\right)^2} \geq \sqrt[3]{\log_{a+b}(b+c) \cdot \log_{a+b}(c+d) \cdot \log_{a+b}(d+a)} \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

Înmulțirea celor 4 inegalități și finalizare.....1 punct

b) $x_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k^4+k^2+1]{1+k} > n \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Obținerea relației $\sqrt[k^4+k^2+1]{1+k} \leq 1 + \frac{k}{k^4+k^2+1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Finalizare: $x_n \in \left(n; n + \frac{1}{2}\right) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Problema 2

a) $\overline{AM} \cdot \overline{B'C'} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot (\overline{HC'} - \overline{HB'}) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\overline{AM} \cdot \overline{B'C'} = 0$ și finalizare2 puncte

b) $(\overline{HA'} + \overline{HB'} + \overline{HC'})^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos C - 2bc \cos A - 2ac \cos B \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

Aplicarea teoremei cosinusului în triunghiul ABC1 punct

Finalizare.....1 punct

Problema 3

a) Demonstrarea relației.....1 punct

b) Alegerea punctului $O \in [O_1O_2]$ astfel încât $O_1O = k \cdot OO_2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Obținerea inegalităților $OP \leq \frac{R_1 + k \cdot R_2}{k+1}$ respectiv $OP \geq \frac{|R_1 - k \cdot R_2|}{k+1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Precizarea mulțimii de puncte în fiecare din cele două cazuri (incluziunea directă).....1 punct

Demonstrarea incluziunii inverse (determinarea punctelor $M \in C(O_1; R_1)$, $N \in C(O_2; R_2)$, punctul

$P \in [MN]$ fixat, $MP = k \cdot PN$, P situat în $D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right)$ dacă $R_1 = k \cdot R_2$ sau în

$D\left(O; \frac{R_1 + k \cdot R_2}{1+k}\right) \setminus \text{Int}C\left(O; \frac{|R_1 - k \cdot R_2|}{1+k}\right)$, dacă $R_1 \neq k \cdot R_2$3 puncte