Concursul Interjudețean de Matematică “Cristian S. Calude”
Proba pe echipe, clasele IX-XII
6 noiembrie 2011

Soluții

RUNDA a IV-a

Problema 1. Pentru un număr natural n, prima cifră a numerelor 2^n şi 5^n este aceeaşi. Să se afle această cifră.

Soluție: Notăm cu a prima cifră a numerelor 2^n şi 5^n, în condițiile problemei. Presupunem că numărul 2^n are s cifre, iar numărul 5^n are t cifre. Atunci $a\cdot 10^{s-1}<2^n<(a+1)\cdot 10^{s-1}$ şi $a\cdot 10^{t-1}<5^n<(a+1)\cdot 10^{t-1}$. Prin înmulțirea acestor inegalități obținem $a^2\cdot 10^{s+t-2}<10^n<(a+1)^2\cdot 10^{s+t-2}$, sau $a^2<10^{n+2-(s+t)}<(a+1)^2$. Pentru că $a\in\{1, 2, ..., 9\}$, avem $1<10^{n+2-(s+t)}<10^2 \Rightarrow n+2-(s+t)=1$ şi $a^2<10<(a+1)^2$. Ultima inegalitate este adevărată pentru $a=3$.

Problema 2. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} y^2z^2+4x^2z^2+9x^2y^2=5x^2y^2z^2 \\ 9x^2+4y^2+z^2=20 \\ 3x-y\sqrt{2}+z=-2 \end{cases}$$

Soluție: Prima ecuație se mai poate scrie $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{9}{z^2}=5$. Vom avea $100=5\cdot 20=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{2}{y}\right)^2+\left(\frac{3}{z}\right)^2\right]\cdot\left[(3x)^2+(2y)^2+z^2\right]\geq(3+4+3)^2=100$. Înseamnă ca avem egalitatea în inegalitatea C.B.S, deci $\frac{1}{3x^2}=\frac{1}{y^2}=\frac{3}{z^2}\Rightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{3}{y^2}=\frac{9}{z^2}$. Cum $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{9}{z^2}=5$, obținem $x^2=\frac{2}{3},\ y^2=2,\ z^2=6\Rightarrow x=\varepsilon_1\sqrt{\frac{2}{3}},\ y=\varepsilon_2\sqrt{2},\ z=\varepsilon_3\sqrt{6},\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3\in\{-1, 1\}$. Înlocuind în a treia ecuație a sistemului, avem $\varepsilon_1\sqrt{6}-2\varepsilon_2+\varepsilon_3\sqrt{6}=-2\Rightarrow\varepsilon_1+\varepsilon_3=0,\ \varepsilon_2=1$. Obținem soluțiile $(x,\ y,\ z)\in\left\{\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\ \sqrt{2},\ \sqrt{6}\right);\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\ \sqrt{2},\ -\sqrt{6}\right)\right\}$.

Problema 3. Fie $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + y^2 = 4$ şi $u^2 + v^2 = -7 + 4u + 4v$. Aflați minimul şi maximul expresiei $(x-u)^2 + (y-v)^2$.

Soluție: Fie numerele complexe $z_1 = x + yi,\ z_2 = u + v_i$. Avem $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow |z_1| = 2$ şi $|z_2 - (2+2i)| = 1$. Fie M_1, M_2 imaginile numerelor complexe z_1 şi respectiv z_2. Atunci $M_1 \in C(O, 2),\ M_2 \in C(A, 1)$ unde A are afixul $2+2i$. Cum $OA = 2\sqrt{2} < 2+1$, înseamnă că cercurile sunt secante, deci minimul căutat este 0. Maximul expresiei va fi $(OA+1+2)^2 = \left(3+2\sqrt{2}\right)^2$.

Problema 4. Să se afle o primitivă a funcției $f:[2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(6\sin x + 4\cos x)\cdot e^x + 11}{\left(e^x + 3\sin x + 4\cos x\right)^2}$.

Soluție: Căutăm o primitivă F de forma $F(x) = \dfrac{a\sin x + b\cos x}{e^x + 3\sin x + 4\cos x}$. Se obține

$$F'(x) = \frac{(a\cos x - b\sin x)\left(e^x + 3\sin x + 4\cos x\right) - (a\sin x + b\cos x)\left(e^x + 3\cos x - 4\sin x\right)}{\left(e^x + 3\sin x + 4\cos x\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{e^x \cdot \left[-(a+b)\sin x + (a-b)\cos x\right] + 4a - 3b}{\left(e^x + 3\sin x + 4\cos x\right)^2}.$$ Deoarece $F'(x) = f(x),\ \forall x \geq 2$, obținem sistemul $\begin{cases} a+b=-6 \\ a-b=4 \\ 4a-3b=11 \end{cases} \Rightarrow a=-1,\ b=-5$. Aşadar, o primitivă a funcției f este funcția $F:[2, \infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = -\dfrac{\sin x + 5\cos x}{e^x + 3\sin x + 4\cos x}$.