Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
6 noiembrie 2011

Soluții

BARAJUL al II-lea

Problemă. Determinați numerele prime a, b, c, d şi n cu proprietatea $2^a+3^b+4^c+5^d=960n+178$.

Soluție: $\left(3^b+5^d\right)\equiv 2(\bmod 4) \Rightarrow (-1)^b+1\equiv 2(\bmod 4) \Rightarrow b=2 \Rightarrow 2^a+4^c+5^d=960n+169$ **(1)**. De aici $2^a+4^b+5^d\equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow (-1)^a+1+(-1)^d\equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow (-1)^a+(-1)^d\equiv 0(\bmod 3)$. Va rezulta că unul dintre numerele a, d este par iar celalalt este impar. Dacă a este par, înseamnă că $a=2$ şi relația **(1)** devine $4^c+5^d=960n+165$, fals. Deci $d=2$ şi a este impar. Relația **(1)** devine acum $2^a+4^c=960n+144 \Rightarrow 2^a+2^{2c}=2^4(60n+9)$ **(2)**. Dacă $a<2c$, atunci relația **(2)** se scrie $2^a\left(1+2^{2c-a}\right)=2^4(60n+9) \Rightarrow a=4$, fals. Dacă $a>2c$, atunci relația **(2)** se scrie $2^{2c}\left(2^{a-2c}+1\right)=2^4(60n+9) \Rightarrow c=2$ şi $2^{a-4}+1=60n+9 \Leftrightarrow 2^a=960n+128 \Leftrightarrow 2^a=2^6(15n+2)$. Va rezulta că $15n+2$ trebuie să fie număr par, adică $n=2$ şi $2^a=2^6\cdot 2^5 \Rightarrow a=11$.
Răspuns: $a=11, b=c=d=n=2$.